Université Claude Bernard Lyon 1 2016-2017

Licence de Mathématiques, 3ème année
Parcours ≪Mathématiques pour l'enseignement≫
Approfondissement en analyse
Examen partiel
Lundi 13 mars 2017 – Durée : 1h

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. Soit $E = \{f : [0,1] \to \mathbb{R}\,; f$ de classe C^1 et $f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$ on définit

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)| \qquad \text{et} \qquad N_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)+f'(x)|.$$

a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur E.

b) Montrer que

$$N_2(f) \leq 2N_1(f) \quad \forall f \in E.$$

c) Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Montrer qu'il existe un unique $f \in E$ tel que $f' + f = g$ et le déterminer. (On pourra multiplier par e^x.)

d) Montrer que les normes N_1 et N_2 sont équivalentes sur E.

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $F = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes réels, F_n l'espace des polynômes réels de degré $\leq n$ et G l'espace des fonctions continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$.

a) Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une constante C_n telle que pour tout polynôme P de degré n nous avons l'inégalité

$$\sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \leq C_n \int_0^1 |P(x)|\,dx. \tag{$*$}$$

On définit, pour $P \in F_n$,

$$N_1(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \qquad \text{et} \qquad N_2(P) = \int_0^1 |P(x)|\,dx.$$

(i) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur F_n.

(ii) En déduire l'inégalité $(*)$.

b) Nous allons maintenant montrer qu'il existe une constante C_n' telle que pour tout polynôme P normalisé de degré n (c'est-à-dire que le coefficient de X^n est 1) nous avons l'inégalité

$$\sup_{x\in[0,1]} |P(x)| \geq C_n'. \tag{$**$}$$

(i) Soit $T : F_n \to \mathbb{R}$ défini par $T(P) = a_n$ où $P(X) = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$. En munissant F_n de la norme N_1, montrer que T est linéaire et continue. (On pourra aussi utiliser la norme $N_3(P) = \max(|a_0|, |a_1|, \ldots, |a_n|)$.

(ii) En déduire l'inégalité $(**)$.

c) Lesquelles des applications suivantes sont linéaires et continues ? Justifiez soigneusement votre réponse. Attention, il faut bien utiliser les normes mentionnées entre parenthèses.

(i) $Id : (G,N_1) \to (G,N_2)$;

(ii) $Id : (G,N_2) \to (G,N_1)$;

(iii) $Id : (F,N_2) \to (F,N_1)$;

(iv) $Id : (F_n,N_2) \to (F_n,N_1)$.