Université Claude Bernard Lyon 1 2016-2017

Licence de Mathématiques, 3ème année
Parcours ≪Mathématiques générales et applications≫
Calcul différentiel et analyse complexe
Examen partiel
Vendredi 10 mars 2017 – Durée : 2h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1.

a) Montrer que pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, $|xy|\le x^2-xy+y^2$.

Soient p,q deux entiers tels que $p,q\ge 1$.
Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(0,0)=0$ et $f(x,y)=\dfrac{x^py^q}{x^2-xy+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$.

b) Montrer que f est bien définie.

c) Déterminer les valeurs de p et q pour lesquelles la fonction f est continue en $(0,0)$.

d) Calculer les dérivées partielles de f en $(0,0)$ et montrer que si f est différentiable en $(0,0)$, alors la différentielle de f en ce point est nulle.

e) Trouver une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que toutes les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$ existent et les calculer.

f) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $p+q>3$.

Exercice 2. On définit

$$E=\{y:[0,1]\to\mathbb{R}\text{ de classe }C^1,\ y(1)=0\},\qquad N(y)=\sup_{x\in[0,1]}|y'(x)|$$

et

$$F=\{z:[0,1]\to\mathbb{R}\text{ continue}\},\qquad \|z\|_\infty=\sup_{x\in[0,1]}|z(x)|$$

a) Soit $z\in F$. Montrer qu'il existe exactement un $y\in E$ tel que $y'=z$ et le déterminer explicitement.

b) Montrer que N est une norme sur E.

c) Montrer que $\forall y\in E$, $\|y\|_\infty\le N(y)$.

d) On munit l'espace E de la norme N. Montrer que l'application $f:E\to F$, $f(y)=-y'+y^3$ est continue.

e) Déterminer les dérivées directionnelles de f, si elles existent.

f) Montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle.

Exercice 3. On considère l'ensemble

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\quad x^4+y^3-y^2+x^2-y=0\}.$$

a) Montrer qu'il existe I et J deux voisinages de 0 et une fonction $g:I\to J$ de classe C^1 tels que :

$$x\in I,\, y\in J,\, (x,y)\in C\quad\Leftrightarrow\quad y=g(x).$$

b) Calculer $g(0)$ et $g'(0)$.

c) Montrer que la fonction g est de classe C^2 au voisinage de 0 et calculer $g''(0)$.

d) Montrer qu'au voisinage de l'origine l'ensemble C est une courbe paramétrée de classe C^2. Le point $(0,0)$ est-il bi-régulier ?

Exercice 4.

a) Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} e^n n^2 z^n$;

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^{\frac{1}{4}}}$;

(iii) $\sum_{0}^{\infty} e^n z^{n^3}$.

b) Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence non nul. Montrer que le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$ est infini.