Licence de Mathématiques, 3ème année
Parcours ≪Mathématiques générales et applications≫
Calcul différentiel et analyse complexe
Examen partiel
Mercredi 21 mars 2018 – Durée : 2h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Les exercices sont classés par ordre chronologique du cours et non par ordre croissant de difficulté.

Exercice 1. Soit $E = C^0\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ muni de la norme

$$\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|.$$

On note B la boule ouverte de E de centre 0 et rayon 1. On définit l'application $T : E \to E$, $T(f) = g$ où

$$g : [0,1] \to \mathbb{R}, \qquad [0,1] \ni x \mapsto g(x) = \int_0^x f^2(t)\,dt.$$

a) Justifier que $g = T(f) \in E$ pour tout $f \in E$ et que T est continue de E dans E.

b) Montrer que T est différentiable en tout point et déterminer la différentielle.

c) Montrer pour tout $f \in E$ la borne suivante pour la norme triple de $DT(f)$:

$$|||DT(f)|||_{\mathscr{L}(E)} \leq 2\|f\|_\infty. \qquad (*)$$

d) Montrer que la différentielle de T, $DT : E \to \mathscr{L}(E)$, est lipschitzienne et en déduire que T est de classe C^1.

e) Dans cette question on suppose seulement que $T : E \to E$ est une application différentiable en tout point et que l'inégalité $(*)$ est satisfaite pour tout $f \in E$. Montrer l'inégalité suivante :

$$\forall f_1, f_2 \in E \qquad \|T(f_1) - T(f_2)\|_\infty \leq 2\|f_1 - f_2\|_\infty \max(\|f_1\|_\infty, \|f_2\|_\infty).$$

f) On reprend l'application T définie au début de l'exercice. On note par I l'application identité sur E et un pose $S = I + \dfrac{T}{2}$. Montrer que pour tout $f_1, f_2 \in E$ on a l'inégalité

$$\|S(f_1) - S(f_2)\|_\infty \geq \|f_1 - f_2\|_\infty\big(1 - \max(\|f_1\|_\infty, \|f_2\|_\infty)\big).$$

g) Montrer que $S(B)$ est un ouvert de E et que S est un C^1 difféomorphisme de B sur $S(B)$.

Exercice 2. On considère le système d'équations suivant :

$$(1 + x + y)\cos z + x^3 = 1$$
$$x - y - \sin z = 0$$

où $x, y, z \in \mathbb{R}$.

a) Montrer qu'il existe deux fonctions f et g de classe C^1 définies au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui s'annulent en 0 et qui ont la propriété suivante : au voisinage du point $(0,0,0)$ le système au-dessus est équivalent au système

$$x = f(z)$$
$$y = g(z).$$

b) Calculer $f'(0)$ et $g'(0)$.

Exercice 3. Soit $b < 0 < a$, et γ la courbe paramétrée $\gamma : [0,+\infty) \to \mathbb{R}^2$ définie par la formule :

$$\gamma(t) = (ae^{bt}\cos t,\, ae^{bt}\sin t)$$

a) Montrer que $\gamma(t)$ admet une limite quand $t \to \infty$ et la déterminer.

b) Calculer la longueur de la courbe γ en fonction de a et b, où on a défini la longueur de γ par

$$\operatorname{long}(\gamma) = \lim_{T\to\infty} \operatorname{long}(\gamma\big|_{[0,T]})$$

et $\gamma\big|_{[0,T]}$ est le bout de la courbe qui va de $\gamma(0)$ jusqu'à $\gamma(T)$.

c) Calculer la courbure en tout point.

d) Trouver la paramétrisation par la longueur d'arc de la courbe γ (préciser soigneusement le domaine de définition).

Exercice 4. On considère les séries entières

$$S_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{et} \quad S_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 3k \\ -1 & \text{si } n = 3k+1 \\ 0 & \text{si } n = 3k+2 \end{cases}$$

a) Calculer les rayons de convergence des séries entières S_1 et S_2.

b) Déterminer les coefficients du produit des séries entières S_1 et S_2.

c) En utilisant le résultat de la question précédente, déterminer la somme de la série entière S_2.