

Analyse harmonique et mécanique des fluides

Dragoş Iftimie

À l'aide d'outils d'analyse harmonique nous montrerons quelques résultats importants en mécanique des fluides incompressibles, plus précisément sur les équations d'Euler et de Navier-Stokes incompressibles. Certains théorèmes sont classiques (mais toujours d'actualité), d'autres sont récents et répondent à des vieilles questions ouvertes.

Table des matières

1	Introduction aux équations de la mécanique des fluides incompressibles	2
1.1	Formulation lagrangienne, formulation eulerienne	2
1.2	Déduction des équations, incompressibilité	2
1.3	Projecteur de Leray, pression	3
2	Équations d'Euler	4
2.1	Tourbillon et loi de Biot-Savart	4
2.2	Quantités conservées	5
2.3	Une inégalité logarithmique	5
2.4	Solutions régulières globales	6
2.5	Suites bornées et compacité faible dans L^1	8
2.6	Solutions faibles à tourbillon dans L^1	10
2.7	Nappes de tourbillon et théorème de Delort	11
2.8	Un peu d'équations différentielles ordinaires	12
2.9	Théorème de Yudovich	13
2.10	Théorie de Calderón-Zygmund	14
2.11	Exemple de croissance double exponentielle de Kiselev et Šverák	16
3	Équations de Navier-Stokes	19
3.1	Solutions de Leray	19
3.2	Solutions mild dans L^3	20
3.3	Extensions possibles	22

1 Introduction aux équations de la mécanique des fluides incompressibles

1.1 Formulation lagrangienne, formulation eulerienne

Considérons un fluide évoluant dans un récipient modélisé par un ouvert Ω de \mathbb{R}^d , $d = 2, 3$. Nous considérons que le fluide est constitué d'un ensemble de particules qui remplissent l'ouvert Ω . L'évolution des particules peut être décrite de deux manières :

- La formulation lagrangienne qui consiste à introduire le flot $\Phi(t, x)$ qui la position à l'instant t de la particule initialement située au point x .
- La formulation eulerienne qui consiste à étudier la vitesse $u(t, x)$ de la particule située au point x à moment t .

Ces deux formulations sont équivalentes. Connaître la vitesse revient à connaître le flot qui résout le système d'EDO suivant

$$\partial_t \Phi(t, x) = u(t, \Phi(t, x)), \quad \Phi(0, x) = x.$$

Dans la suite nous utiliserons la formulation eulerienne.

1.2 Dédution des équations, incompressibilité

Les équations de la mécanique des fluides s'obtiennent en combinant plusieurs principes physiques généraux.

Tout d'abord, la conservation du moment s'écrit sous la forme

$$\rho \gamma = f + \operatorname{div} \sigma$$

où ρ est la densité, γ l'accélération, f la force appliquée au fluide et σ le tenseur des contraintes (ou tenseur de Cauchy).

Par les lois de la cinématique nous savons que l'accélération est la dérivée matérielle de la vitesse :

$$\gamma = (\partial_t + u \cdot \nabla)u.$$

Ce qui compte maintenant c'est le choix du tenseur des contraintes σ . Pour un fluide newtonien σ est linéaire en le tenseur de déformation $D(u) = \frac{1}{2}(\partial_i u_j + \partial_j u_i)_{i,j}$ et doit être de la forme

$$\sigma = 2\mu D(u) + \lambda \operatorname{div} u I - pI$$

où p est la pression, $\operatorname{div} u = \sum_j \partial_j u_j$, I est la matrice identité et $\mu \geq 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sont des constantes matérielles.

La loi de conservation de la masse s'exprime sous la forme

$$\partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho u) = 0.$$

Nous nous intéressons au cas des fluides incompressibles. Nous avons la caractérisation suivantes de l'incompressibilité :

Proposition 1. *Un fluide est incompressible si et seulement si $\operatorname{div} u \equiv 0$.*

De plus, nous supposons que le fluide est homogène, c'est-à-dire que la densité initiale est constante $\rho(0, x) \equiv \rho_0$.

Les équations précédentes nous permettent d'obtenir alors l'EDP suivante où les inconnues sont la vitesse u et la pression p :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

où on a négligé le terme de force et renomé la pression. Nous ajouterons à ce système la donnée de Cauchy

$$u|_{t=0} = u_0(x)$$

et nous nous intéresserons au caractère bien posé du problème de Cauchy ainsi obtenu. C'est-à-dire nous aimerions avoir :

- L'existence globale d'une solution.
- Son unicité dans la classe d'existence.
- La dépendance continue de la solution par rapport à la donnée initiale u_0 .

Si ces trois conditions sont remplies on dit que le système est bien posé au sens d'Hadamard.

1.3 Projecteur de Leray, pression

Nous allons maintenant introduire quelques outils qui nous permettront de nous débarrasser de la pression qui apparaît dans l'équation de la vitesse. Nous avons d'abord la caractérisation suivante des gradients.

Proposition 2. *Soit u un champ de vecteurs à coefficients distributions tempérées dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$. Il existe $p \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ tel que $u = \nabla p$ si et seulement si $\partial_i u_j = \partial_j u_i$ pour tout i et j .*

Un outil très important est le projecteur de Leray \mathbb{P} qui est la projection orthogonale L^2 de l'espace des champs de vecteurs de carré intégrable sur le sous espace L^2_σ des champs de vecteurs de divergence nulle. Soit \mathcal{F} la transformation de Fourier. Nous avons les propriétés suivantes.

Proposition 3. *Soit $u \in L^2$ un champ de vecteurs. Alors*

- a) $\mathcal{F}(\mathbb{P}u) = \widehat{u} - \frac{\xi \cdot \widehat{u}}{|\xi|^2} \xi$;
- b) $\operatorname{div} u = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}u = u$;
- c) $\mathbb{P}u = 0$ si et seulement si u est un gradient.

2 Équations d'Euler

Nous considérons dans cette partie les équations d'Euler qui modélisent l'évolution d'un fluide parfait incompressible :

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

2.1 Tourbillon et loi de Biot-Savart

Supposons un instant que la dimension d'espace est $d = 2$. Une quantité très importante est le tourbillon

$$\omega = \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1$$

En prenant le rotationnel de l'équation de la vitesse nous obtenons l'équation suivante pour le tourbillon :

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0.$$

Grâce à la proposition 2 nous savons que l'équation de la vitesse est équivalente à l'équation du tourbillon. De plus, nous pouvons déterminer la vitesse à partir du tourbillon. Plus précisément, un calcul immédiat montre que

$$\nabla^\perp \omega = \Delta u$$

d'où

$$u = \Delta^{-1} \nabla^\perp \omega.$$

La solution fondamentale du laplacien en dimension deux étant $\frac{1}{2\pi} \ln |x|$ nous obtenons la formule suivante qui porte le nom de loi de Biot-Savart :

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \omega(y) dy.$$

En dimension trois on peut aussi définir le tourbillon

$$\omega = (\partial_2 u_3 - \partial_3 u_2, \partial_3 u_1 - \partial_1 u_3, \partial_1 u_2 - \partial_2 u_1)$$

mais son équation

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega - \omega \cdot \nabla u = 0$$

nous est beaucoup moins utile.

2.2 Quantités conservées

En toute dimension il est facile de voir que l'intégrale de la vitesse $\int u$ et la norme L^2 de la vitesse $\|u\|_{L^2}$ sont constantes en temps.

En dimension deux nous avons de plus la conservation des quantités suivantes :

- les normes L^p du tourbillon $\|\omega\|_{L^p}$ pour tout $1 \leq p \leq \infty$;
- l'intégrale du tourbillon $\int \omega$;
- le centre de masse $\int x \omega$;
- le moment d'inertie $\int |x|^2 \omega$.

2.3 Une inégalité logarithmique

Nous nous intéressons maintenant au lien entre le gradient de la vitesse et le tourbillon. Nous avons de toute évidence $|\omega| \leq |\nabla u|$, mais nous avons besoin d'inégalités dans l'autre sens. On ne peut pas dériver directement la loi de Biot-Savart

$$u(x) = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \omega(y) dy$$

car le noyau qui apparaît

$$\nabla_x \left(\frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \right)$$

est homogène de degré -2 donc non localement intégrable. L'intégrale qui en résulte n'est pas bien définie au sens usuel. On peut néanmoins la définir au sens de la valeur principale ; c'est une intégrale dite singulière. Ce point de vue fera l'objet d'une autre partie du cours. Disons seulement que la théorie de Caldéron-Zygmund des intégrales singulières nous permettra d'affirmer que

$$\|\nabla u\|_{L^p} \leq C(p)\|\omega\|_{L^p} \quad \forall 1 < p < \infty.$$

Le cas $p = \infty$ est exclu de l'inégalité au-dessus (c'est faux lorsque $p = \infty$). Or pour montrer l'existence globale des solutions régulières c'est précisément le cas $p = \infty$ qu'il nous faut. Il se trouve que le cas $p = \infty$ peut être atteint moyennant l'ajout d'un terme logarithmique. D'où le nom d'inégalité logarithmique. Plus précisément, nous avons l'énoncé suivant.

Proposition 4. *Soit $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$ avec $s > 2$. Il existe une constante C qui ne dépend que de s telle que*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C + C\|\omega\|_{L^2} + C\|\omega\|_{L^\infty}(1 + \log^+ \|u\|_{H^s})$$

où $\log^+ = \max(\log, 0)$.

La même inégalité est vraie en dimension 3 avec la modification que $s > \frac{5}{2}$ au lieu de $s > 2$.

2.4 Solutions régulières globales

L'inégalité logarithmique montrée précédemment nous permet de montrer que les équations d'Euler dans \mathbb{R}^2 sont globalement bien posées au sens d'Hadamard, par exemple dans l'espace H^3 . Nous avons le théorème suivant.

Théorème 5. *Soit $u_0 \in H^3(\mathbb{R}^2)$ un champ de vecteurs de divergence nulle. Il existe une unique solution globale $u \in L_{loc}^\infty([0, \infty[; H^3)$ de l'équation d'Euler. De plus, il existe une constante $C = C(u_0)$ telle que $\|u(t)\|_{H^3} \leq e^{Ce^{Ct}}$ pour tout $t \geq 0$.*

Esquisse de la preuve. Trois grandes étapes nous permettent de montrer ce résultat.

Etape 1 : Estimations *a priori* locales en temps.

Il s'agit là d'estimer la norme H^3 d'une solution qui est donnée. En utilisant au passage la majoration

$$\|\nabla f\|_{L^4} \leq C\|f\|_{L^\infty}\|\nabla^2 f\|_{L^2}$$

on peut montrer que les estimations d'énergie H^3 s'écrivent sous la forme

$$\partial_t \|u\|_{H^3} \leq C\|\nabla u\|_{L^\infty}\|u\|_{H^3}. \quad (1)$$

Par inclusion de Sobolev, $\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{H^3}$ d'où la relation ci-dessous implique une borne locale en temps pour $\|u\|_{H^3}$.

Etape 2 : Construction de solutions approchées et passage à la limite.

On considère J_ε une opérateur de régularisation par convolution avec une approximation de l'identité. Le système approché est le suivant :

$$(S_\varepsilon) \quad \begin{cases} \partial_t u_\varepsilon + \mathbb{P}J_\varepsilon((J_\varepsilon u_\varepsilon) \cdot \nabla(J_\varepsilon u_\varepsilon)) = 0 \\ u_\varepsilon|_{t=0} = J_\varepsilon u_0 \end{cases}$$

Nous avons l'existence globale des solutions de (S_ε) par application du théorème de Cauchy-Lipschitz dans L^2 et par estimation L^2 pour u_ε .

Les estimations *a priori* H^3 s'appliquent à u_ε et montrent que u_ε est borné dans H^3 sur un petit intervalle de temps : u_ε est borné dans $L^\infty(0, T; H^3)$ où $T = C/\|u_0\|_{H^3}$. À partir de l'équation de u_ε on déduit que $\partial_t u_\varepsilon$ est borné dans $L^\infty(0, T; H^2)$ donc u_ε est borné dans $Lip(0, T; H^2)$. Les u_ε sont équicontinus en temps à valeurs dans H^2 , le théorème d'Ascoli et le théorème de Banach-Alaoglu permettent donc de déduire, après extraction d'une sous-suite, que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans $L^\infty(0, T; H^3)$ faible* et dans $C^0([0, T]; H_{loc}^2)$ fortement. Ces convergences permettent facilement de passer à la limite dans (S_ε) pour trouver que u vérifie l'équation d'Euler à donnée initiale u_0 .

Etape 3 : Les conditions d'explosion en temps fini ne sont pas réunies, les solutions sont globales.

Si la solution u cesse d'exister au temps fini $T^* < \infty$ alors nécessairement la norme H^3 de u doit exploser en T^* . Le lemme de Gronwall appliqué à (1)

implique que cela ne peut arriver que si

$$\int_0^{T^*} \|\nabla u\|_{L^\infty} = \infty.$$

D'autre part, l'inégalité logarithmique de la proposition 4 nous montre que cela impliquerait que

$$\int_0^{T^*} \|\omega\|_{L^\infty} = \infty.$$

Cette relation ne peut être vraie si $T^* < \infty$ puisque la norme L^∞ du tourbillon est constante en temps. La solution est donc globale. \square

Remarque 6. *Si on se donne un tourbillon régulier à support compact, le théorème précédent ne s'applique pas car la vitesse n'est pas intégrable. En effet, la loi de Biot-Savart implique tout de suite l'asymptotique suivante pour la vitesse :*

$$u(x) = \frac{x^\perp}{2\pi|x|^2} \int \omega + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \quad \text{quand } |x| \rightarrow \infty.$$

Dans ce cas, la vitesse est dans un espace qu'on appelle L_m^2 , c'est-à-dire qu'il existe m tel que

$$u(x) - m \frac{x^\perp}{|x|^2} \chi_{|x|>1} \in L^2.$$

Mais il est aisé de remplacer les estimations L^2 sur la vitesse par des estimations L_m^2 et le reste de l'argument ne change pas. On obtient ainsi une version du théorème 5 qui couvre ce cas de figure.

2.5 Suites bornées et compacité faible dans L^1

Nous nous intéressons dans cette partie au problème suivant. On se donne une suite f_n bornée dans $L^1(\mathbb{R}^d)$ et nous aimerions savoir si on peut extraire une sous-suite qui converge dans L^1 faible* (on dit que $f_n \rightarrow f$ dans L^1 faible* si $\int f_n g \rightarrow \int f g$ pour tout $g \in L^\infty$). L'espace L^1 étant inclus dans le dual de L^∞ , le théorème de Banach-Alaoglu nous dit bien que la suite f_n est relativement compacte pour la topologie faible du dual de L^∞ . Mais L^∞ n'étant pas séparable, elle n'est pas forcément séquentiellement relativement

compacte. Par contre, on peut voir L^1 comme étant inclus dans le dual de l'espace des fonctions continues à support compact, c'est-à-dire on peut voir les fonctions L^1 comme des mesures de Radon. Comme l'espace des fonctions continues à support compact est lui séparable, nous pouvons bien extraire une sous-suite convergente au sens des mesures de Radon. Plus précisément, nous avons dans un premier temps l'énoncé suivant :

Théorème 7. *Soit f_n une suite bornée de $L^1(\mathbb{R}^d)$. Il existe une mesure de Radon bornée μ et une sous-suite f_{n_k} telle que $f_{n_k} \rightharpoonup \mu$ au sens des mesures de Radon :*

$$\int f_{n_k} g \rightarrow \int g d\mu \quad \forall g \text{ continue et nulle à l'infini.}$$

Ce théorème n'est pas un résultat de compacité séquentielle faible dans L^1 puisque la limite est une mesure et non une fonction L^1 . C'est le théorème de Dunford-Pettis qui nous donne un critère de compacité séquentielle faible dans L^1 .

Théorème 8 (Dunford-Pettis). *Soit f_n une suite bornée de $L^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose que*

- $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|f_n| > R} |f_n| = 0$ uniformément en n (on dit que les f_n sont uniformément intégrables) ;
- $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|x| > R} |f_n| = 0$ uniformément en n (on dit que la suite f_n est étroite à l'infini).

Alors il existe $f \in L^1$ et une sous-suite f_{n_k} telle que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ dans L^1 faible.*

La réciproque est vraie aussi mais nous n'en aurons pas besoin ici. Si on enlève l'hypothèse d'étroitesse à l'infini, le résultat reste vrai mais la convergence obtenue est légèrement plus faible.

Théorème 9. *Soit f_n une suite bornée de $L^1(\mathbb{R}^d)$. On suppose que les f_n sont uniformément intégrables. Alors il existe $f \in L^1$ et une sous-suite f_{n_k} telle que $f_{n_k} \rightharpoonup f$ au sens suivant :*

$$\int_{\mathbb{R}^d} f_{n_k} g \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f g$$

pour toute fonction g bornée et nulle à l'infini.

2.6 Solutions faibles à tourbillon dans L^1

Le critère de compacité de Dunford-Pettis nous permet de montrer l'existence globale de solutions faibles en dimension 2 lorsque le tourbillon initial est seulement L^1 . Pour cela, définissons d'abord ce que c'est une solution. En effet, lorsque le tourbillon est seulement L^1 , la vitesse n'est pas dans L^2_{loc} (elle est seulement $L^{2,\infty}$, voir plus tard pour la définition). On ne peut donc pas donner un sens à $u \otimes u$ dans les distributions. Si on regarde l'équation du tourbillon, c'est encore pire puisque $u \cdot \nabla \omega$ est encore moins régulier. La forme spéciale de la loi de Biot-Savart nous permet pourtant de donner un sens à ce terme dans \mathcal{D}' . C'est le point de vue de Schochet [8], et c'est aussi l'approche que nous adopterons dans la suite.

Soit $\varphi \in C_0^\infty$ une fonction test. Essayons de mettre l'intégrale $\int u \cdot \nabla \omega \varphi$ sous une forme qui ait un sens lorsque le tourbillon est seulement dans L^1 . On fait une intégration par parties, on utilise la loi de Biot-Savart et on symétrise pour obtenir

$$\begin{aligned} \int u \cdot \nabla \omega \varphi &= - \int u \cdot \nabla \varphi \omega \\ &= - \iint \frac{(x-y)^\perp}{2\pi|x-y|^2} \cdot \nabla \varphi(x) \omega(x) \omega(y) dx dy \\ &= \iint \frac{(x-y)^\perp \cdot (\nabla \varphi(y) - \nabla \varphi(x))}{4\pi|x-y|^2} \omega(x) \omega(y) dx dy \\ &= \iint H_\varphi(x, y) \omega(x) \omega(y) dx dy. \end{aligned}$$

où

$$H_\varphi(x, y) = \frac{(x-y)^\perp \cdot (\nabla \varphi(y) - \nabla \varphi(x))}{4\pi|x-y|^2}$$

Par le théorème des accroissements finis on voit tout de suite que H_φ est une fonction bornée donc l'intégrale double $\iint H_\varphi(x, y) \omega(x) \omega(y) dx dy$ est bien définie si ω est seulement L^1 .

Définition 10. Soit $\omega \in L^1$. On définit $u \cdot \nabla \omega$ dans \mathcal{D}' par

$$\langle u \cdot \nabla \omega, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \iint H_\varphi(x, y) \omega(x) \omega(y) dx dy$$

Nous pouvons alors montrer le théorème suivant d'existence de solutions faibles à tourbillon L^1 :

Théorème 11. Soit $\omega_0 \in L^1(\mathbb{R}^2)$. Il existe une solution globale $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1(\mathbb{R}^2))$ de l'équation

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}', \quad \omega|_{t=0} = \omega_0.$$

Si, de plus, $u_0 \in L_m^2$ pour un certain m alors $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L_m^2)$ et u vérifie l'équation de la vitesse au sens des distributions.

2.7 Nappes de tourbillon et théorème de Delort

Les solutions de l'équation d'Euler dont la vitesse exhibe des discontinuités à travers une courbe ont une signification physique. Pour ce type de vitesse, le tourbillon est concentré sur une courbe (d'où le nom de nappe de tourbillon) et n'est donc pas L^1 . Il nous faut un théorème d'existence de solutions dont le tourbillon est une mesure. Il convient d'abord de se poser la question de la formulation des équations lorsque le tourbillon est une mesure. On pourrait procéder comme dans la définition 10 puisque même si ω est seulement une mesure, le noyau H_φ est quand même une fonction bornée borélienne donc l'intégrale $\iint H_\varphi(x, y) \omega(x) \omega(y) dx dy$ est bien définie. Il y a cependant un problème qui vient du fait que le noyau H_φ n'est pas bien défini sur la diagonale $D = \{(x, x) ; x \in \mathbb{R}^2\}$. Si on veut que la définition ait un sens, il faudrait que le noyau H_φ soit bien défini presque partout pour la mesure produit $\omega(x) \otimes \omega(y)$. C'est-à-dire il faudrait que la mesure de la diagonale D pour $\omega(x) \otimes \omega(y)$ soit nulle. Or on a par application du théorème de Fubini que

$$\begin{aligned} \omega \otimes \omega(D) &= \iint \chi_D(x, y) d\omega(x) d\omega(y) \\ &= \int \left(\int \chi_{\{x\}}(y) d\omega(y) \right) d\omega(x) \\ &= \int \omega(\{x\}) d\omega(x). \end{aligned}$$

Pour que cette quantité soit nulle il suffit que $\omega(\{x\}) = 0$ pour tout x , c'est-à-dire il suffit que la mesure ω soit continue (ou diffuse selon la terminologie employée). Cette remarque nous permet d'introduire la définition suivante :

Définition 12. Soit ω une mesure de Radon continue et bornée. On définit $u \cdot \nabla \omega$ dans \mathcal{D}' par

$$\langle u \cdot \nabla \omega, \varphi \rangle_{\mathcal{D}', \mathcal{D}} = \iint H_\varphi(x, y) d\omega(x) d\omega(y).$$

Comment peut-on assurer qu'une mesure est continue? Le critère qui va nous servir est celui de l'appartenance à H^{-1} .

Proposition 13. *Soit μ une mesure de Radon qui appartient à $H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}^2)$. Alors μ est continue.*

Nous pouvons énoncer maintenant le théorème de Delort [2] sur l'existence des nappes de tourbillon.

Théorème 14 (Delort). *Supposons que ω_0 est une mesure de Radon bornée, positive, à support compact appartenant à H_{loc}^{-1} . Alors il existe une solution globale $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; \mathcal{B}\mathcal{M}(\mathbb{R}^2) \cap H_{loc}^{-1}(\mathbb{R}^2))$ et $u \in L_{loc}^\infty(\mathbb{R}_+; L_m^2)$ de l'équation*

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}', \quad \omega|_{t=0} = \omega_0.$$

De plus, l'équation de la vitesse est aussi vérifiée au sens des distributions.

On a noté par $\mathcal{B}\mathcal{M}$ l'espace des mesures de Radon bornées. Remarquons que l'appartenance du tourbillon à H^{-1} permet de donner un sens à l'équation du tourbillon dans les distributions.

2.8 Un peu d'équations différentielles ordinaires

Avant d'aborder le théorème de Yudovich sur les solutions faibles, nous allons montrer une généralisation du théorème de Cauchy-Lipschitz sur les équations différentielles ordinaires. Commençons par un résultat d'unicité du à Osgood.

Lemme 15 (Osgood). *Soient f et μ deux fonctions continues et positives définies sur \mathbb{R}_+ et $\alpha \geq 0$. On suppose de plus que μ est croissante et que*

$$\forall t \geq 0 \quad f(t) \leq \alpha + \int_0^t \mu(f(s)) ds.$$

Alors

$$\forall t \geq 0 \quad \int_\alpha^{f(t)} \frac{1}{\mu(s)} ds \leq t.$$

En particulier, si $\alpha = 0$ et si $\frac{1}{\mu}$ n'est pas intégrable en 0 alors $f \equiv 0$.

Voici maintenant une généralisation du théorème de Cauchy-Lipschitz.

Théorème 16. Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction bornée telle que

$$|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq \mu(|x_1 - x_2|) \quad \forall t \geq 0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^d$$

où $\mu : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est croissante, continue et telle que $\frac{1}{\mu}$ est non-intégrable en 0. Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^d$ l'équation différentielle ordinaire

$$x'(t) = f(t, x(t)), \quad x(0) = x_0$$

admet une unique solution globale.

2.9 Théorème de Yudovich

Nous avons montré précédemment que pour un tourbillon initial dans L^1 il existe une solution globale à tourbillon borné dans L^1 . Si l'on suppose de plus que le tourbillon initial appartient aussi à un autre L^p , il est aisé de voir que la solution ainsi obtenue reste bornée dans L^p . En effet, la suite de tourbillons réguliers qui approchent la donnée initiale peut être supposée bornée dans L^p . Alors la suite de solutions régulières sera bornée dans L^p . Par conséquent la solution obtenue par passage à la limite appartiendra à L^p . Nous avons montré le résultat suivant.

Théorème 17. Soit $\omega_0 \in L^1 \cap L^p$. Il existe une solution globale $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1 \cap L^p)$ de l'équation d'Euler dans \mathbb{R}^2 à donnée initiale ω_0 .

On ne connaît pas l'unicité de telles solutions sauf dans le cas $p = \infty$.

Théorème 18 (Yudovich [9]). Soit $\omega_0 \in L^1 \cap L^\infty$. Il existe une unique solution globale $\omega \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^1 \cap L^\infty)$ de l'équation d'Euler dans \mathbb{R}^2 à donnée initiale ω_0 . De plus, le champ de vitesse est borné et log-Lipschitz au sens que

$$|u(t, x_1) - u(t, x_2)| \leq C(\|\omega_0\|_{L^1}, \|\omega_0\|_{L^\infty})|x_1 - x_2| \log|x_1 - x_2|$$

pour tout $t \geq 0$ et x_1, x_2 tels que $|x_1 - x_2| \leq \frac{1}{2}$. Enfin les trajectoires sont bien définies au sens qu'elles existent globalement et sont uniques.

Concluons ce paragraphe avec une remarque sur l'unicité des solutions faibles des équations d'Euler. Un grand problème ouvert est celui de l'unicité des solutions faibles à tourbillon L^p . Par contre, si on n'impose pas de

condition sur le tourbillon, De Lellis et Székelyhidi on construit des solutions “aberrantes” dont la norme L^2 peut faire à peu près ce qu’on veut. Ces solutions sont non uniques puisqu’on peut par exemple partir de 0 sans que la solution soit identiquement nulle. Les idées de De Lellis et Székelyhidi sont très différentes de ce qu’on a présenté ici et reposent sur des techniques d’intégration convexe. Pour l’instant, cette approche semble être cantonnée au cas des solution ou seulement un $1/3$ de la dérivée de la vitesse puisse être contrôlé. En effet, la conjecture d’Onsager (démontrée) affirme que si l’on impose une borne sur la dérivée d’ordre $1/3$ de la vitesse, alors la norme L^2 de la vitesse est conservée et les solutions de De Lellis et Székelyhidi sont alors exclues. On est donc assez loin du cas où on contrôle le tourbillon, c’est-à-dire on contrôle une dérivée entière de la vitesse.

2.10 Théorie de Calderón-Zygmund

L’objet de cette partie est d’étudier les propriétés des intégrales du type

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y) dy$$

où le noyau $K(x, y)$ présente une singularité en $|x - y|^{-n}$ quand x est proche de y . De ce fait, l’intégrale ne converge pas au sens usuel. Le plus souvent, le noyau K est de la forme $K(x, y) = L(x - y)$ où L est une fonction homogène de degré $-n$. Dans ce cas, on peut essayer de donner un sens à Tf en utilisant la notion de *valeur principale*, c’est-à-dire on est tenté de poser

$$Tf(x) = \text{PV} \int_{\mathbb{R}^n} L(x - y)f(y) dy \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} L(x - y)f(y) dy.$$

On peut vérifier aisément que la limite au-dessus existe (et par conséquent la valeur principale est bien définie) si et seulement si la moyenne de L sur la sphère unité s’annule :

$$\int_{S(0,1)} L(x) d\sigma_x = 0.$$

Si cette condition est satisfaite, alors on pourra appliquer la théorie de Calderón-Zygmund ci-dessous. En particulier, le noyau associé à l’opérateur $\omega \mapsto \nabla u$ (avec les notations habituelles) vérifie cette propriété.

Nous avons le théorème suivant.

Théorème 19 (Calderón-Zygmund). Soit T un opérateur borné sur L^2 . On suppose qu'il existe un noyau $K(x, y)$ qui est C^1 pour $x \neq y$, qui vérifie

$$|K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^n}, \quad |\nabla K(x, y)| \leq \frac{C}{|x - y|^{n+1}}$$

et tel que pour toute fonction f borné à support compact nous avons

$$Tf(x) = \int_{\mathbb{R}^n} K(x, y)f(y) dy \quad \forall x \notin \text{supp } f.$$

Alors T est borné dans tous les L^p , $1 < p < \infty$, et sa norme $\|T\|_{\mathcal{L}(L^p)}$ est $O(1/(p-1))$ quand $p \rightarrow 1$ et $O(p)$ quand $p \rightarrow \infty$.

Remarques.

- L'affirmation “ T est borné dans L^p ” doit être comprise au sens que pour tout $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ nous avons que $\|Tf\|_{L^p} \leq C\|f\|_{L^p}$. Par densité de C_0^∞ dans L^p cela nous permet d'étendre T à L^p tout entier.
- Dans le cas de l'opérateur $\omega \mapsto \nabla u$ les hypothèses du théorème sont facilement vérifiées.

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin d'introduire les espaces de Lorentz.

Définition 20. L'espace L^p faible, ou espace de Lorentz, est l'espace

$$L^{p,\infty} = \{f ; \text{mes}(|f| > \lambda) \leq \frac{C}{\lambda^p} \forall \lambda > 0\}$$

muni de

$$\|f\|_{L^{p,\infty}}^p = \sup_{\lambda > 0} \lambda^p \text{mes}(|f| > \lambda).$$

Voici deux propriétés des espaces de Lorentz.

Lemme 21. a) $L^p \subset L^{p,\infty}$.

b) Pour tout $f \in L^p$ nous avons

$$\|f\|_{L^p}^p = p \int_0^\infty \lambda^{p-1} \text{mes}(|f| > \lambda) d\lambda.$$

Définition 22. Un opérateur T est dit de type (p, p) faible si T est linéaire et continu de L^p dans $L^{p,\infty}$.

La preuve du théorème 19 repose sur la proposition suivante.

Proposition 23. *Sous les hypothèses du théorème de Calderón-Zygmund nous avons que T est de type $(1, 1)$ faible.*

En effet, le théorème 19 résulte facilement de cette proposition et du cas particulier suivant du théorème d'interpolation de Marcinkiewicz.

Théorème 24 (Théorème d'interpolation de Marcinkiewicz). *Soit T un opérateur de type (p, p) faible et de type (q, q) faible où $p < q$. Alors T est borné sur tout L^r , $p < r < q$.*

Il reste à montrer la proposition 23. Pour cela, nous avons besoin de deux résultats intermédiaires. Le premier est le lemme de recouvrement de Calderón-Zygmund.

Lemme 25 (Lemme de recouvrement de Calderón-Zygmund). *Soient $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$ une fonction continue et $\lambda > 0$. Il existe v, w_j , $j \in \mathbb{N}$ des fonctions de L^1 et une suite de cubes Q_j d'intérieurs disjoints tels que*

- $u = v + \sum_{j \in \mathbb{N}} w_j$ et $\|v\|_{L^1} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \|w_j\|_{L^1} \leq 3\|u\|_{L^1}$;
- pour tout j la fonction w_j est de moyenne nulle et à support dans Q_j ;
- la fonction v est bornée et $\|v\|_{L^\infty} \leq 2^n \lambda$;
- nous avons que $\sum_{j \in \mathbb{N}} \text{mes}(Q_j) \leq \frac{\|u\|_{L^1}}{\lambda}$.

Voici enfin un lemme technique.

Lemme 26. *Il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $t > 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $|y| \leq t$, et pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ on a*

$$\int_{|x-x_0| \geq 2t} |K(x, x_0 + y) - K(x, x_0)| dx \leq C.$$

2.11 Exemple de croissance double exponentielle de Kiselev et Šverák

Nous avons vu dans le théorème 5 que la croissance des normes de Sobolev d'une solution régulière de l'équation d'Euler est au plus double exponentielle en temps. Il est surprenant de constater que cette borne qui semble grossière est en fait optimale. Plus précisément, Kiselev et Šverák [5] ont construit un

exemple de solution de l'équation d'Euler telle que la norme Lipschitz du tourbillon exhibe une croissance double-exponentielle en temps. Cependant, il s'agit d'un exemple de fluide évoluant dans un disque et la preuve fait intervenir de manière essentielle le bord du disque. On peut dire que c'est le bord qui produit cette croissance double-exponentielle.

Avant d'énoncer le théorème de Kiselev et Šverák, quelques commentaires sur la loi de Biot-Savart sur un domaine borné. Dans un domaine borné, il faut supposer que la vitesse est tangente au bord. Soit ω un tourbillon régulier dans un ouvert borné et régulier Ω de \mathbb{R}^2 . On définit la fonction courant $\psi = \Delta^{-1}\omega$, c'est-à-dire que ψ résout le système

$$\Delta\psi = \omega \quad \text{dans } \Omega, \quad \psi|_{\partial\Omega} = 0.$$

On vérifie aisément que $u = \nabla^\perp\psi$ est de divergence nulle, de tourbillon ω et tangent au bord. La loi de Biot-Savart dans Ω devient alors

$$u(x) = \int_{\Omega} \nabla_x^\perp G(x, y) \omega(y)$$

où G est la fonction de Green du laplacien sur Ω . En fait, u est déterminé de manière unique seulement si Ω est simplement connexe. Si Ω n'est pas simplement connexe, alors u est déterminé modulo un champ harmonique. Un champ harmonique est un champ de vecteurs de divergence nulle, de curl nul et tangent au bord. Si Ω admet N trous, alors l'ensemble de champs harmoniques est un espace vectoriel de dimension N . Dans le cas d'une couronne circulaire par exemple, les champs harmoniques sont engendrés par $\frac{(x-a)^\perp}{|x-a|^2}$ où a est le centre de la couronne.

Dans le cas du disque unité $D = D(0, 1)$, la fonction de Green est connue explicitement :

$$G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log \frac{|x - y|}{|x - y^*||y|}$$

où y^* désigne l'inversion par rapport au cercle unité :

$$y^* = \frac{y}{|y|^2}.$$

Lemme 27. *Dans le cas du disque unité nous avons que*

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C(1 + \log_+ \|\nabla \omega\|_{L^\infty}).$$

où la constante C dépend de $\|\omega\|_{L^\infty}$.

Proposition 28. *Toute solution régulière de l'équation d'Euler sur le disque unité vérifie*

$$\|\nabla\omega\|_{L^\infty} \leq C^{C^t}$$

pour une certaine constante C .

Kiselev et Šverák ont aussi montré la réciproque :

Théorème 29 (Kiselev et Šverák). *Il existe un tourbillon initial et régulier ω_0 dans le disque unité tel que la solution ω de l'équation d'Euler dans le disque unité vérifie*

$$\|\nabla\omega\|_{L^\infty} \geq C^{C^t}$$

pour une certaine constante $C > 1$.

Pour expliquer l'exemple de Kiselev et Šverák nous allons nous placer sur le disque unité translaté d'une unité vers le haut $D_1 = D((0, 1), 1)$. Nous supposons que le tourbillon initial est antisymétrique par rapport à l'axe vertical $x_1 = 0$ (i.e. $\omega_0(-x_1, x_2) = -\omega_0(x_1, x_2)$) et qu'il est positif pour $x_1 > 0$. Il n'est pas difficile de voir que ces propriétés sont conservées au cours du temps. Cela nous permet de montrer les estimations suivantes sur le champ de vitesse.

Lemme 30. *Soit $0 < \varepsilon < \frac{\pi}{2}$. Il existe $\delta > 0$ tel que*

a) *si $|x| < \delta$ et $0 < \arg(x) < \frac{\pi}{2} - \varepsilon$ alors*

$$\frac{u_1}{x_1} = -\frac{4}{\pi} \int_{Q(x)} \frac{y_1 y_2}{|y|^4} \omega(y) dy + O(1) \quad (2)$$

où $Q(x)$ est le quadrant $Q(x) = \{y ; y_1 \geq x_1 \text{ et } y_2 \geq x_2\}$ et $O(1)$ est une quantité bornée par une constante qui dépend de ε et de $\|\omega\|_{L^\infty}$;

b) *si $|x| < \delta$ et $\varepsilon < \arg(x) < \frac{\pi}{2}$ alors*

$$\frac{u_2}{x_2} = \frac{4}{\pi} \int_{Q(x)} \frac{y_1 y_2}{|y|^4} \omega(y) dy + O(1). \quad (3)$$

Kiselev et Šverák supposent que le tourbillon initial est égal à 1 pour $x_1 > 0$ sauf dans une petite région. On peut alors voir que dans les termes de droite de (2) et (3) les restes $O(1)$ sont négligeables et les intégrales sont minorées par une grande constante. En prenant x sur le bord du disque et

près de 0, sa vitesse est de l'ordre de $-Cx_1$. Par le lemme de Gronwall, une telle particule se rapproche exponentiellement vite de 0 d'où une borne inférieure exponentielle pour la norme Lipschitz du tourbillon. Pour obtenir une borne double exponentielle, il faut travailler plus en considérant des régions verticales au voisinage de l'origine et du bord du disque.

3 Équations de Navier-Stokes

Rappelons les équations de Navier-Stokes

$$\begin{cases} \partial_t u + u \cdot \nabla u - \Delta u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \\ u|_{t=0} = u_0(x) \end{cases}$$

où on a supposé le coefficient de viscosité $\nu = 1$ et la force nulle.

La norme L^2 de la vitesse n'est plus conservée, mais elle est décroissante. Plus précisément, en multipliant l'équation par u on trouve l'égalité d'énergie suivante :

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 = \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (4)$$

Soit \dot{H}^s l'espace de Sobolev homogène associé à

$$\|f\|_{\dot{H}^s} = \| |\xi|^s \widehat{f} \|_{L^2}.$$

3.1 Solutions de Leray

Dans son travail fondateur [7], Leray a utilisé les estimations d'énergie au-dessus pour montrer l'existence globale des solutions d'énergie finie (aussi appelées solutions de Leray).

Théorème 31 (Leray). *Soit $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$, $n = 2, 3$, de divergence nulle. Il existe une solution globale $u \in L^\infty(\mathbb{R}_+; L^2) \cap L^2(\mathbb{R}_+; \dot{H}^1) \cap C^0(\mathbb{R}_+; L_w^2)$ où L_w^2 est l'espace L^2 muni de la topologie faible. De plus, u vérifie l'inégalité d'énergie suivante*

$$\|u(t)\|_{L^2}^2 + 2 \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2}^2 \leq \|u_0\|_{L^2}^2 \quad \forall t \geq 0.$$

Enfin, en dimension deux ces solutions sont uniques, appartiennent à $C^0(\mathbb{R}_+; L^2)$ et vérifient l'égalité d'énergie (4).

Ainsi, en dimension deux les équations de Navier-Stokes sont globalement bien-posées (dans L^2).

La preuve de ce théorème est très similaire à celle du théorème 5 pour l'équation d'Euler. On régularise l'équation, on utilise les estimations d'énergie et on passe à la limite par compacité.

3.2 Solutions mild dans L^3

En dimension trois, on ne sait pas si les solutions de Leray sont uniques. Il nous faut plus de régularité pour pouvoir obtenir l'unicité des solutions. Donc la donnée initiale doit être plus régulière que simplement L^2 . Historiquement, les premiers résultats d'unicité en dimension trois font appel à des estimations d'énergie H^1 au lieu de L^2 (en supposant que la donnée initiale est dans H^1 donc). Puis, on s'est vite aperçu que H^1 peut être remplacé par $H^{\frac{1}{2}}$; c'est le théorème de Fujita et Kato [3]. On ne peut pas descendre en-dessous de $H^{\frac{1}{2}}$ en nombre de dérivées mais on peut améliorer la manière dont ces dérivées sont estimées.

Remarquons maintenant que les équations de Navier-Stokes dans \mathbb{R}^3 sont invariantes par le changement de fonctions

$$u_\lambda(t, x) = \lambda u(\lambda^2 t, \lambda x). \quad (5)$$

C'est-à-dire si u est solution alors u_λ l'est aussi. Il est alors naturel de s'intéresser aux espaces qui laissent invariante la norme de la donnée initiale de u_λ . Plus précisément :

Définition 32. *Un espace de Banach de distributions tempérées $X \hookrightarrow \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ est dit critique pour l'équation de Navier-Stokes s'il vérifie la propriété d'invariance suivante :*

$$\|\lambda f(\lambda x)\|_X = \|f\|_X$$

pour tout f et λ .

Dans l'échelle des espace de Sobolev \dot{H}^s l'espace critique est $\dot{H}^{\frac{1}{2}}$. Parmi les espaces de Lebesgue L^p , l'espace critique est L^3 . Et Kato [4] a montré que l'espace L^3 est adapté aux équations de Navier-Stokes au sens que nous avons l'existence et l'unicité locale des solutions à données L^3 , et même l'existence et l'unicité globale lorsque les données sont petites dans L^3 .

Théorème 33 (Kato). *Soit $u_0 \in L^3$ de divergence nulle. Il existe $T > 0$ tel que les équations de Navier-Stokes admettent une unique solution sur $[0, T]$ à donnée initiale u_0 . Ces solutions sont continues en temps à valeurs dans L^3 . Si de plus la norme $\|u_0\|_{L^3}$ est suffisamment petite, alors on peut prendre $T = +\infty$.*

Remarque 34. *On peut même montrer l'unicité des solutions dans l'espace $L^\infty(0, T; L^3)$.*

La preuve de ce théorème consiste à appliquer le lemme de point fixe suivant.

Lemme 35. *Soit X un espace de Banach et $B : X \times X \rightarrow X$ une application bilinéaire et continue. Soit $\eta > 0$ tel que $\|B(x_1, x_2)\|_X \leq \eta \|x_1\|_X \|x_2\|_X$ pour tout $x_1, x_2 \in X$. Si $\|y\|_X < \frac{1}{4\eta}$ alors l'équation $x = y + B(x, x)$ admet une unique solution dans la boule $B(0, \frac{1}{2\eta})$. De plus, la norme de cette solution est majorée par $2\|y\|$.*

Nous appliquerons ce lemme dans les espaces

$$X_p(T) = \{f : [0, T] \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} ; \|f\|_{X_p(T)} = \sup_{0 \leq t \leq T} t^{\frac{1}{2} - \frac{3}{2p}} \|f(t)\|_{L^p} < \infty\}$$

Nous écrivons d'abord l'équation de Navier-Stokes sous la forme mild suivante :

$$u(t) = e^{t\Delta} u_0 + \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes u)(s) ds = e^{t\Delta} u_0 + B(u, u)$$

où

$$B(u, v) = \int_0^t e^{(t-s)\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}(u \otimes v)(s) ds.$$

On peut montrer l'estimation suivante sur le noyau de B .

Lemme 36. *Le noyau de l'opérateur $e^{t\Delta} \mathbb{P} \operatorname{div}$ se majore par $C(\sqrt{t} + |x|)^{-4}$.*

Cette estimation nous permet ensuite de dire comment agit l'opérateur B sur les espaces X_p .

Lemme 37. *Soient $p, q, r \geq 3$ tels que $0 < \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1$ et $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < \frac{1}{3} + \frac{1}{r}$. Alors $B : X_p \times X_q \rightarrow X_r$ est bilinéaire et continu.*

Le théorème 33 se montre ensuite par application du lemme de point fixe 35 dans l'espace X_6 par exemple.

3.3 Extensions possibles

On a vu dans la section précédente que l'espace L^3 est adapté à l'équation de Navier-Stokes. On peut se poser la question si on peut améliorer cet espace, et jusqu'où on peut aller. Il se trouve qu'on peut apporter des réponses convaincantes à ces deux questions.

Tout d'abord, remarquons qu'on ne peut pas aller plus loin que l'espace C^{-1} suivant :

$$C^{-1} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) ; \|f\|_{C^{-1}} = \sup_{0 \leq t \leq T} \sqrt{t} \|e^{t\Delta} f\|_{L^\infty} < \infty\}.$$

En effet, nous avons le résultat suivant.

Proposition 38. *Soit X un espace critique dont la norme est invariante par translation. Alors X s'injecte continûment dans C^{-1} .*

Ainsi, avant même de se poser des questions de continuité de B ou autre, rien que les propriétés d'invariance de la norme imposent que l'on se place dans un sous-espace de C^{-1} . Or, il se trouve que les équations de Navier-Stokes sont mal-posées dans C^{-1} . En effet, Bourgain et Pavlovic [1] ont mis en évidence un phénomène de croissance non bornée de la norme C^{-1} de la solution.

Théorème 39 (Bourgain et Pavlovic). *Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe une donnée initiale régulière u_0 telle que $\|u_0\|_{C^{-1}} < \varepsilon$ mais la solution u devient grande avant le temps $t = \varepsilon$:*

$$\sup_{0 \leq t \leq \varepsilon} \|u(t)\|_{C^{-1}} > \frac{1}{\varepsilon}.$$

La donnée initiale de Bourgain et Pavlovic est une combinaison linéaire d'ondes planes $\cos(k \cdot x)$. La solution de l'équation de la chaleur $e^{t\Delta} \cos(k \cdot x)$ se calcule explicitement ce qui permet de calculer la norme C^{-1} de cette onde plane ; elle sera en $1/|k|$. On prendra donc k grand. On écrit ensuite l'équation de Navier-Stokes sous la forme équivalente suivante :

$$\begin{aligned} u &= e^{t\Delta} u_0 + B(u, u) \\ &= e^{t\Delta} u_0 + B(e^{t\Delta} u_0 + B(u, u), e^{t\Delta} u_0 + B(u, u)) \\ &= e^{t\Delta} u_0 + B(e^{t\Delta} u_0, e^{t\Delta} u_0) + R \end{aligned}$$

où le reste R est trilinéaire. Or, lorsqu'on travaille avec des quantités petites, les termes trilinéaires sont plus petits que les termes bilinéaires (qui eux

sont plus petits que les termes linéaires). On peut essentiellement dire que la solution est donnée par $e^{t\Delta}u_0 + B(e^{t\Delta}u_0, e^{t\Delta}u_0)$. Or si $e^{t\Delta}u_0$ est lui petit, on peut construire les ondes planes de telle manière que $B(e^{t\Delta}u_0, e^{t\Delta}u_0)$ soit grand dans C^{-1} . En effet, ce terme peut être calculé explicitement si la donnée initiale est une combinaison linéaire d’ondes planes avec k grand. Et on trouve dedans des “ondes planes” qui ne sont pas forcément avec k grand (penser par exemple à l’égalité $1 = e^{inx}e^{-inx}$). Cette observation est à la base de l’argument de Bourgain et Pavlovic.

Il y a une autre raison de penser que l’espace C^{-1} n’est pas adapté aux équations de Navier-Stokes. Pour une telle régularité on n’arrive pas à définir $u \otimes u$ au sens des distributions jusqu’en 0 puisque cette quantité se majore par C/t et pas mieux. En imposant la condition

$$\int_0^1 \int_{B(x,1)} |u(t,y)|^2 dy dt < \infty \quad \forall x$$

et tenant compte de l’invariance des équations de Navier-Stokes par rapport au changement de variables (5) on obtient tout naturellement l’espace suivant

$$BMO^{-1} = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) ; \forall \lambda > 0, \int_0^{\lambda^2} \int_{B(x,\lambda)} |e^{t\Delta}f|^2 \leq C\lambda^3 \}.$$

Il se trouve que Koch et Tataru [6] ont montré que cet espace est adapté aux équations de Navier-Stokes. C’est à ce jour le meilleur espace où l’on puisse faire tourner un argument de point fixe pour obtenir des solutions des équations de Navier-Stokes.

Références

- [1] J. Bourgain et N. Pavlović. Ill-posedness of the Navier–Stokes equations in a critical space in 3D. *Journal of Functional Analysis*, 255(9) :2233–2247, 2008.
- [2] J.-M. Delort. Existence de nappes de tourbillon en dimension deux. *Journal of the American Mathematical Society*, 4(3) :553–586, 1991.
- [3] H. Fujita et T. Kato. On the Navier-Stokes initial value problem. I. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 16(4) :269–315, 1964.

- [4] T. Kato. Strong L^p -solutions of the Navier-Stokes equation in \mathbb{R}^m , with applications to weak solutions. *Mathematische Zeitschrift*, 187(4) :471–480, 1984.
- [5] A. Kiselev et V. Šverák. Small scale creation for solutions of the incompressible two-dimensional Euler equation. *Annals of Mathematics. Second Series*, 180(3) :1205–1220, 2014.
- [6] H. Koch et D. Tataru. Well-posedness for the Navier–Stokes Equations. *Advances in Mathematics*, 157(1) :22–35, 2001.
- [7] J. Leray. Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace. *Acta Math.*, 63 :193–248, 1934.
- [8] S. Schochet. The weak vorticity formulation of the 2-D Euler equations and concentration-cancellation. *Communications in Partial Differential Equations*, 20(5-6) :1077–1104, 1995.
- [9] V. I. Yudovich. Non-stationary flows of an ideal incompressible fluid. *Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz.*, 3 :1032–1066, 1963.