Analyse complexe

Licence de Mathématiques
Université Lyon 1

Dragoş Iftimie

Table des matières

Mise à jour le 27 mars 2023.

1 Rappels sur les nombres complexes

On note par i un nombre imaginaire et convient que $i^2 = -1$. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ est défini alors par $\mathbb{C} = \{z = x+iy\ ;\ x, y \in \mathbb{R}^2\}$. L'écriture $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}^2$ est unique et on appelle $x = \mathrm{Re}(z)$ la partie réelle de z et $y = \mathrm{Im}(z)$ la partie imaginaire de z. L'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ s'identifie à $\mathbb{R}^2$ via l'identification $\mathbb{C} \ni z = x + iy \longleftrightarrow (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On peut sommer et multiplier les nombres complexes suivant les règles usuelles en tenant compte du fait que $i^2 = -1$. Si $z_1 = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ alors $z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2)$ et $z_1z_2 = x_1x_2 - y_1y_2 + i(x_1y_2 + x_2y_1)$. Il ne faut pas confondre le produit de nombres complexes avec le produit scalaire de $\mathbb{R}^2$.

Les coordonnées polaires (r, θ) sont définies par $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ et $\theta = \arg(z)$ (défini modulo 2π). On a que $|z_2z_2| = |z_1||z_2|$.

Le complexe conjugué de $z = x + iy$ est le nombre complexe $\overline{z} = x - iy$. Nous avons l'inégalité triangulaire $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ ainsi que l'inégalité triangulaire inverse $|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|$.

La topologie de $\mathbb{C}$ est celle associée à la distance classique $d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2|$, c'est-à-dire la topologie euclidienne de $\mathbb{R}^2$. La convergence des suites se fait sur les parties réelles et imaginaires. Une fonction définie sur $\mathbb{C}$ va être continue si elle envoie les suites convergentes en des suites convergentes. On note par $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\ ; |z - z_0| < r\}$ le disque ouvert de centre z_0 et rayon r, et par $\overline{D}(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C}\ ; |z - z_0| \leq r\}$ le disque fermé de centre z_0 et rayon r. Un ensemble $U \subset \mathbb{C}$ est ouvert s'il contient un disque autour de tous ses points : pour tout $z_0 \in U$ il existe $r > 0$ tel que $D(z_0, r) \subset U$.

Un ouvert est dit connexe s'il ne peut être écrit comme l'union de deux ouverts disjoints non-vides. Un ouvert U est dit connexe par arcs si toute paire de points de U peut être relié par un arc tracé sur U. Dans $\mathbb{C}$ un ouvert connexe est aussi connexe par arcs.

Proposition 1.1. *Un ouvert de $\mathbb{C}$ est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.*

2 Séries entières

2.1 Définition, rayon de convergence

Définition 2.1. *Une série entière est une série formelle de la forme $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ où $a_n \in \mathbb{C}$ et $z \in \mathbb{C}$.*

Rappelons maintenant quelques propriétés de la limsup.

Proposition 2.2. *Soit (x_n) une suite réelle et $l = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{k\geq n} x_k$. Alors*

a) l est la plus grande limite de sous-suite de (x_n).

b) Si $l' > l$ alors il existe N tel que $x_n < l'$ pour tout $n \geq N$.

c) Si $x_n \geq 0$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ alors $x_n \to 0$.

Définition 2.3. *On appelle rayon de convergence de la série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ le nombre*

$$R = \sup\{r \geq 0\ ;\ |a_n|r^n \text{ borné}\}.$$

Le théorème suivant regroupe quelques propriétés du rayon de convergence.

Théorème 2.4. *Soit $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R.*

a) La série converge pour tout $|z| < R$ et diverge pour tout $|z| > R$.

b) Le rayon de convergence de la série des dérivées est aussi égal à R. La série converge uniformément sur tous les compacts du disque de convergence $D(0, R)$, sa somme est C^∞ sur $D(0, R)$ et on peut la dériver terme à terme (la somme des dérivées est la dérivée de la somme).

c) Nous avons la formule d'Hadamard pour le rayon de convergence

$$R = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}}$$

d) Si tous les a_n sont non-nuls et $\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} \to l$ alors $R = l$ (critère de d'Alembert).

Fin du cours du 16/01/2023.

Le rayon de convergence d'une série entière peut être 0 (par exemple si $a_n = n^n$) ou ∞ (par exemple si $a_n = 1/n^n$). Si le rayon de convergence est nul la série ne converge qu'en 0, si c'est ∞ la série converge en tout point. Lorsqu'on applique la formule d'Hadamard on convient que $\frac{1}{0} = \infty$ et $\frac{1}{\infty} = 0$.

Définition 2.5. *Le disque de convergence d'une série entière est le disque ouvert $D(0, R)$ où R est le rayon de convergence.*

Même si la série converge sur le disque fermé, comme c'est le cas par exemple pour la série $\sum \frac{z^n}{n^2}$, on appelle quand même disque de convergence le disque ouvert. La raison est que les autres propriétés, comme la convergence de la série des dérivées, ne sont vraies que dans le disque ouvert même si la série converge sur le disque fermé.

2.2 Somme et produit

Définition 2.6. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. La série somme est la série $\sum c_n z^n$ où $c_n = a_n + b_n$.*

Proposition 2.7. *Soient $\sum a_n z^n$, respectivement $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1, respectivement R_2. Alors la série somme est de rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$. De plus, si $R_1 \neq R_2$ alors $R = \min(R_1, R_2)$. Si $|z| < \min(R_1, R_2)$, alors $\sum c_n z^n = \sum a_n z^n + \sum b_n z^n$.*

Lorsque $R_1 = R_2$ on n'a plus forcément $R = \min(R_1, R_2)$. Contre-exemple en posant $a_n = -b_n$.

Définition 2.8. *Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières. La série produit est la série $\sum c_n z^n$ où $c_n = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.*

Proposition 2.9. *Soient $\sum a_n z^n$, respectivement $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence R_1, respectivement R_2. Alors la série produit est de rayon de convergence $R \geq \min(R_1, R_2)$. De plus, si $|z| < \min(R_1, R_2)$, alors la somme de la série produit est le produit de sommes de deux séries (la somme du produit est le produit des sommes).*

Lorsque $R_1 \neq R_2$ on n'a pas forcément $R = \min(R_1, R_2)$. Contre-exemple en posant $\sum a_n z^n = 1 - z$ et $\sum b_n z^n = \sum z^n$.

3 Fonctions holomorphes, définition et exemples

3.1 Définitions, généralités

Définition 3.1. *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$.*

- *La fonction f est dite $\mathbb{C}$−dérivable, ou plus simplement dérivable, en $z_0 \in \Omega$ si la limite $\lim\limits_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$ existe. La valeur de cette limite est la dérivée de f en z_0 :*

$$f'(z_0) = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

— *La fonction f est dite holomorphe sur Ω si elle est dérivable en tout point de Ω.*

On peut voir très facilement que les puissance z^n, et plus généralement les polynômes, sont des fonctions dérivables.

On vérifie sans peine que les propriétés suivantes bien connues pour la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ restent vraie pour la dérivabilité sur $\mathbb{C}$.

Proposition 3.2. *a) Une fonction dérivable en un point est continue en ce point.*

b) Si f et g sont dérivables en z_0, alors $f+g$ est dérivable en z_0 et $(f+g)' = f' + g'$.

c) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et f est dérivable en z_0, alors λf est dérivable en z_0 et $(\lambda f)' = \lambda f'$.

d) Si f et g sont dérivables en z_0, alors fg est dérivable en z_0 et $(fg)' = f'g + fg'$.

e) Si f et g sont dérivables en z_0 et $g(z_0) \neq 0$, alors $\frac{f}{g}$ est dérivable en z_0 et $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g-fg'}{g^2}$.

f) Si $n \in \mathbb{N}^*$ et f est dérivable en z_0, alors f^n est dérivable en z_0 et $(f^n)' = nf'f^{n-1}$.

g) Si g est dérivable en z_0 et f est dérivable en $g(z_0)$ alors $f \circ g$ est dérivable en z_0 et $(f \circ g)' = f' \circ g\ g'$.

Le lien entre la $\mathbb{C}$–dérivabilité et la $\mathbb{R}^2$–différentiabilité se fait par les équations de Cauchy–Riemann.

Théorème 3.3. *Soit $f = P + iQ$ une fonction définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$. Soit $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$.*

a) La fonction f est $\mathbb{C}$–dérivable en z_0 si et seulement si f est différentiable en tant que fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ et les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites :

$$\frac{\partial P}{\partial x}(z_0) = \frac{\partial Q}{\partial y}(z_0)$$
$$\frac{\partial P}{\partial y}(z_0) = -\frac{\partial Q}{\partial x}(z_0).$$

b) Les équations de Cauchy-Riemann sont équivalentes à

$$\frac{\partial f}{\partial y}(z_0) = i\frac{\partial f}{\partial x}(z_0).$$

c) Si f est $\mathbb{C}$–dérivable en z_0 alors

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0).$$

Exemple. La fonction $f(z) = |z|^2$ est dérivable seulement en 0. La fonction $f(x,y) = x^2 + iy^2$ est dérivable seulement sur la droite $\{(x,x)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$. Aucune de ces deux fonctions n'est holomorphe.

Corollaire 3.4. *Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur Ω de dérivée nulle. Alors f est constante.*

Corollaire 3.5. *La somme d'une série entière est holomorphe sur le disque de convergence et sa dérivée est la somme des dérivées.*

Définition 3.6. *Une primitive d'une fonction f définie sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ est une fonction holomorphe sur Ω telle que $g' = f$.*

3.2 Exponentielle complexe

Définition 3.7. *Pour $z \in \mathbb{C}$ on définit l'exponentielle complexe par*

$$e^z = \sum_{z=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

On peut vérifier aisément à l'aide du critère de d'Alembert que la série qui définit l'exponentielle a un rayon de convergence infini. L'exponentielle est donc bien-définie pour tout $z \in \mathbb{C}$. Remarquons aussi que lorsque $z \in \mathbb{R}$ on retrouve l'exponentielle réelle. Voici maintenant quelques propriétés de l'exponentielle complexe.

Proposition 3.8. *Nous avons les propriétés suivantes :*

a) L'exponentielle complexe est holomorphe et sa dérivée est elle-même : $(e^z)' = e^z$.

b) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

c) $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.

d) $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$ *et* $\arg(e^z) = \mathrm{Im}\, z$ *(mod 2π). En particulier, l'exponentielle complexe ne s'annule jamais.*

e) L'exponentielle complexe est périodique de période $2i\pi$: $e^{z+2i\pi} = e^z$.

3.3 Fonctions trigonométriques complexes

On peut aussi définir les principales fonctions trigonométriques comme sommes de séries entières :

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$$

$$\cosh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \sinh z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \qquad \tanh z = \frac{\sinh z}{\cosh z}$$

En utilisant le développement en série entière de l'exponentielle, on peut écrire ces fonctions trigonométriques à l'aide de l'exponentielle. Nous avons

$$\cos z = \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} \qquad \sin z = \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i} \qquad \cosh z = \frac{e^z+e^{-z}}{2} \qquad \sinh z = \frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

$$\cos' = -\sin \qquad \sin' = \cos \qquad \cosh' = \sinh \qquad \sinh' = \cosh \qquad \tanh' = \frac{1}{\cosh^2} \qquad \tan' = \frac{1}{\cos^2}$$

Toutes les formules trigonométriques connues dans $\mathbb{R}$ s'étendent à $\mathbb{C}$ sans difficulté en utilisant les expressions des fonctions trigonométriques en terme d'exponentielle et les propriétés de l'exponentielle.

3.4 Logarithme complexe

On peut définir le logarithme comme l'inverse de l'exponentielle.

Définition 3.9. *Soit $z \in \mathbb{C}^*$. On appelle* $\log(z)$ *un nombre complexe u tel que $e^u = z$.*

Remarques.

a) $\log(0)$ n'a pas de sens. En effet, l'exponentielle ne s'annule jamais.

b) $\log(z)$ n'est pas uniquement défini. En effet, l'exponentielle est périodique de période $2\pi i$ donc si $e^u = z$ alors $e^{u+2\pi i} = z$ aussi.

En identifiant le module et l'argument de e^u et de z on trouve la formule suivante pour $\log(z)$:

$$\log(z) = \ln|z| + i\arg(z). \tag{3.1}$$

Comme l'argument est défini à 2π près, le logarithme est défini à $2\pi i$ près.

Fin du cours du 17/01/2023.

Nous aimerions maintenant définir le logarithme en tant que fonction holomorphe. Cela s'avère plutôt compliqué. On montrera plus tard qu'il n'est pas possible de faire cela sur $\mathbb{C}^*$ tout entier.

Définition 3.10. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Une détermination holomorphe du logarithme sur Ω est une fonction f holomorphe sur Ω telle que $e^{f(z)} = z$ pour tout $z \in \Omega$.*

Pour trouver une détermination holomorphe du logarithme sur un ouvert Ω il suffit de pouvoir définir de manière continue l'argument sur Ω. En effet, cela implique que le logarithme défini par (3.1) est régulier (différentiable) et si c'est différentiable c'est automatiquement holomorphe.

Proposition 3.11. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}^*$. Toute détermination continue du logarithme sur Ω est holomorphe. En particulier, nous avons l'équivalence entre l'existence d'une détermination holomorphe du logarithme sur Ω et l'existence d'une détermination continue du logarithme sur Ω.*

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on introduit le plan fendu $P_\alpha = \mathbb{C} \setminus \{re^{i\alpha} \ ; \ r \geq 0\}$. L'argument peut être défini de manière continue sur P_α en choisissant par exemple $\arg(z) \in]\alpha, \alpha + 2\pi[$. Donc il existe une détermination holomorphe du logarithme sur le plan fendu P_α. On appelle détermination principale du logarithme celle qui correspond au cas $\alpha = -\pi$.

Définition 3.12. *On appelle détermination principale du logarithme l'application*

$$\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_- \ni z \mapsto \operatorname{Log}(z) = \ln|z| + i\operatorname{Arg}(z) \quad \textit{où} \quad \operatorname{Arg}(z) \in]-\pi, \pi[.$$

Dans la suite, quand on parlera du logarithme complexe il faut comprendre la détermination principale du logarithme sauf mention contraire. Remarquons que nous n'avons pas forcément l'égalité $\operatorname{Log}(z_1z_2) = \operatorname{Log}(z_1) + \operatorname{Log}(z_2)$. Cette relation n'a lieu que modulo $2\pi i$.

Lorsqu'une détermination holomorphe du logarithme existe, on peut définir de manière holomorphe pour $z \in \mathbb{C}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ la puissance complexe par $z^\alpha = e^{\alpha\log(z)}$. On n'a pas forcément l'égalité $(z_1z_2)^\alpha = z_1^\alpha z_2^\alpha$.

On peut aussi s'intéresser à la détermination holomorphe du logarithme d'une fonction.

Définition 3.13. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe. Une détermination holomorphe du logarithme de f sur Ω est une fonction g holomorphe sur Ω telle que $e^{g(z)} = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$.*

Proposition 3.14. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}^*$ une fonction holomorphe.*

a) Si g est une détermination holomorphe de $\log(f)$ sur Ω, alors $g' = \frac{f'}{f}$.

b) Si $\frac{f'}{f}$ admet une primitive sur Ω, alors il existe une détermination holomorphe de $\log(f)$ sur Ω.

Voici un corollaire immédiat.

Corollaire 3.15. *a) Il existe une détermination holomorphe de* $\log(f)$ *sur* Ω *si et seulement si* $\frac{f'}{f}$ *admet une primitive sur* Ω.

b) Il existe une détermination holomorphe de $\log(z)$ *sur* Ω *si et seulement si* $\frac{1}{z}$ *admet une primitive sur* Ω.

c) La dérivée d'une détermination holomorphe de $\log(z)$ *est toujours* $\frac{1}{z}$.

Un dernier résultat sur le logarithme :

Proposition 3.16. *Pour tout* $|z| < 1$ *nous avons que*

$$\operatorname{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{n}.$$

4 Intégration, indice, Cauchy

4.1 Intégration complexe

Commençons par plusieurs définitions.

Définition 4.1. *a) Un chemin est une courbe* C^1 *par morceaux.*

b) L'origine d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *est* $\gamma(a)$. *L'extrémité est* $\gamma(b)$.

c) Un lacet est une courbe fermée : $\gamma(a) = \gamma(b)$.

d) Un chemin simple est un chemin sans intersections (la paramétrisation est injective).

e) Un changement de paramètre est toujours un C^1 *difféomorphisme* <u>*croissant*</u> *(le sens de parcours de la courbe est préservé).*

f) On désigne par γ_- *la courbe parcourue dans le sens opposé :* $\gamma_- : [a,b] \to \mathbb{C}$, $\gamma_-(t) = \gamma(a+b-t)$.

g) Si γ_1 *et* γ_2 *sont deux courbes telles que l'extrémité de* γ_1 *est l'origine de* γ_2 *on définit l'union* $\gamma_1 \vee \gamma_2$ *comme étant la courbe paramétrée par*

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}, \quad \gamma(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & si\ t \in [0,1] \\ \gamma_2(t) & si\ t \in [1,2] \end{cases}$$

(par un changement de paramétrage on peut supposer γ_1 *définie sur* $[0,1]$ *et* γ_2 *définie sur* $[1,2]$.*)*

h) Si f *est une fonction continue sur un chemin* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, *on définit*

$$\int_{\gamma} f(z)\,dz = \int_a^b f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt.$$

où le produit $f(\gamma(t))\,\gamma'(t)$ *se fait en tant que nombres complexes.*

Voici quelques propriétés élémentaires de l'intégrale complexe.

Proposition 4.2. *a) L'intégrale complexe est linéaire.*

b) L'intégrale complexe est invariante par changement de paramètrage.

c) Si on change le sens de parcours d'une courbe, l'intégrale change de signe :

$$\int_{\gamma_-} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz.$$

d) Nous avons l'inégalité

$$\Big|\int_\gamma f(z)\,dz\Big| \leq \mathrm{long}(\gamma)\sup_{z\in\gamma}|f(z)|.$$

e) Si f est holomorphe alors

$$\int_\gamma f'(z)\,dz = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

f) Si f admet des primitives et γ est un lacet alors

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

g) Si l'extrémité de γ_1 est l'origine de γ_2 alors

$$\int_{\gamma_1\vee\gamma_2} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \int_{\gamma_2} f(z)\,dz.$$

h) Si $f_n \to f$ uniformément sur γ alors

$$\int_\gamma f_n(z)\,dz \to \int_\gamma f(z)\,dz.$$

$\boxed{\text{Fin du cours du 23/01/2023.}}$

Exemples.

— Si $\overrightarrow{z_1 z_2}$ est le segment qui va de z_1 à z_2 et $C \in \mathbb{C}$, alors

$$\int_{\overrightarrow{z_1 z_2}} C\,dz = C(z_2 - z_1).$$

— Si $C(0,1)$ est le cercle unité orienté dans le sens direct, alors

$$\int_{C(0,1)} z^n\,dz = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq -1 \\ 2\pi i & \text{si } n = -1. \end{cases}$$

En particulier, $\frac{1}{z}$ n'a pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$ ni sur aucun ouvert contenant le cercle unité. On ne peut donc pas avoir de détermination holomorphe du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ ni sur aucun ouvert contenant le cercle unité.

Comme l'intégrale complexe ne dépend pas du paramétrage de la courbe, pour travailler avec une intégrale complexe il suffit de disposer de l'image de la courbe et de son sens de parcours. On pourra choisir le paramétrage comme on veut dès lors que le sens de parcours est préservé. En pratique, on ne donnera pas le paramétrage d'une courbe ; on donnera seulement son image et son sens de parcours. Dans le cas d'un lacet simple, parfois il n'est même pas nécessaire de spécifier le sens de parcours. On choisira par défaut le sens direct (ou sens trigonométrique), c'est-à-dire le sens inverse des aiguilles d'une horloge. L'autre sens est appelé sens rétrograde.

4.2 Indice d'un point par rapport à un lacet

Définition 4.3. *Soit γ un lacet et $z_0 \notin \gamma$. On définit l'indice du point z_0 par rapport à la courbe γ :*

$$\operatorname{Ind}(z_0, \gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{1}{z - z_0}\, dz.$$

Voici quelques propriétés de l'indice.

Proposition 4.4. *Soit γ un lacet et $z_0 \notin \gamma$.*

a) L'indice est toujours entier : $\operatorname{Ind}(z_0, \gamma) \in \mathbb{Z}$.

b) L'indice est constant sur chaque composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

c) L'indice est nul sur la composante connexe non-bornée de $\mathbb{C} \setminus \gamma$.

Formule géométrique pour l'indice. Nous avons l'interprétation géométrique suivante de l'indice. L'indice est le nombre de tours que l'on fait autour de z_0 lorsqu'on parcourt complètement la courbe (les tours dans le sens direct comptent pour $+1$, ceux dans le sens rétrograde comptent pour -1). Dans le cas d'une courbe d'allure compliquée, il est utile de procéder de la manière suivante. On trace une demi-droite arbitraire d'origine z_0. Pour chaque intersection de la demi-droite avec la courbe on compte $+1$ si la courbe croise la demi-droite dans le sens direct et -1 sinon (le sens direct ou rétrograde est défini par rapport à z_0, c'est-à-dire en supposant que l'origine est en 0). On fait la somme et le résultat est l'indice de z_0.

Remarquons enfin que dans le cas d'un lacet simple, l'indice à l'intérieur de la courbe est ± 1, suivant que la courbe est parcourue dans le sens direct ou pas.

Définition 4.5. *Un lacet simple est dit orienté dans le sens direct si l'indice d'un point situé à l'intérieur du lacet est égal à 1.*

4.3 Théorème et formules de Cauchy. Applications

Définition 4.6. *Un ouvert Ω est dit étoilé s'il existe $a \in \Omega$ tel que pour tout $z \in \Omega$ nous avons que tout le segment fermé $[a, z]$ est inclus dans Ω.*

Le but de cette partie est de montrer le théorème de Cauchy suivant.

Théorème 4.7 (Cauchy)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors*

$$\int\limits_{\gamma} f(z)\, dz = 0.$$

En fait, on peut se passer de l'hypothèse que Ω est étoilé. Il suffit de supposer que f est holomorphe à l'intérieur du lacet γ.

Pour montrer ce théorème, on considére d'abord le cas d'un triangle.

Théorème 4.8 (Goursat)**.** *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, $\triangle$ un triangle inclus (avec son intérieur) dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω sauf éventuellement en un point où elle est continue. Alors*

$$\int\limits_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0.$$

$\boxed{\text{Fin du cours du 30/01/2023.}}$

Voici maintenant une version légèrement améliorée du théorème de Cauchy.

Théorème 4.9 (Cauchy bis). *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω sauf éventuellement en un point où elle est continue. Alors*

a) f admet un primitive sur Ω.

b) Nous avons que

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0.$$

Nous obtenons comme corollaire la formule de Cauchy :

Théorème 4.10 (formule de Cauchy). *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Pour tout $z \in \Omega \setminus \gamma$ nous avons que*

$$f(z)\operatorname{Ind}(z,\gamma) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(u)}{u-z}\,du.$$

L'intégrale qui apparaît dans le terme de droite au-dessus peut se dériver par rapport à z. En dérivant plusieurs fois nous obtenons des formules similaires pour les dérivées de f.

Théorème 4.11 (formules de Cauchy). *Soit Ω un ouvert étoilé, γ un lacet dans Ω et f une fonction holomorphe sur Ω. Alors f peut être dérivée autant de fois qu'on veut et pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $z \in \Omega \setminus \gamma$ nous avons que*

$$f^{(n)}(z)\operatorname{Ind}(z,\gamma) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(u)}{(u-z)^{n+1}}\,du.$$

Remarques.

a) Soulignons que ce théorème montre en particulier que la dérivée d'une fonction holomorphe est elle-même holomorphe.

b) Comme dans les théorèmes de Goursat et de Cauchy bis, nous pouvons supposer que la fonction f est holomorphe sauf éventuellement en un point où elle est continue. Nous obtenons alors que f est holomorphe aussi dans ce point exceptionnel.

La formule de Cauchy dans le cas d'un cercle donne la formule de la moyenne suivante :

Proposition 4.12 (formule de la moyenne). *Soit f holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D}(z_0,r)$. Alors*

$$f(z_0) = \int_0^1 f(z_0 + re^{2\pi it})\,dt.$$

En prenant la valeur absolue dans les formules de Cauchy dans le cas où γ est un cercle, nous obtenons les inégalités de Cauchy.

Proposition 4.13 (inégalités de Cauchy). *Soit f holomorphe au voisinage du disque fermé $\overline{D}(z_0,r)$. Alors*

$$|f^{(n)}(z_0)| \le \frac{n!}{r^n}\sup_{C(z_0,r)}|f|.$$

Une application immédiate des inégalités de Cauchy est le théorème de Liouville.

Théorème 4.14 (Liouville). *Une fonction holomorphe et bornée sur $\mathbb{C}$ est nécessairement constante.*

Le théorème de Liouville implique à son tour le théorème de d'Alembert.

Théorème 4.15 (d'Alembert)**.** *Tout polynôme non-constant admet une racine complexe.*

Le théorème de Goursat admet une réciproque. C'est le théorème de Morera.

Théorème 4.16 (Morera)**.** *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω. Si pour tout triangle $\triangle$ contenu dans Ω avec son intérieur nous avons que $\int\limits_{\partial\triangle} f(z)\,dz = 0$, alors f est holomorphe.*

Voici maintenant une réciproque de la propriété qui affirme que l'intégrale sur un lacet d'une dérivée est nulle.

Théorème 4.17. *Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω. La fonction f admet une primitive dans Ω si et seulement si $\int\limits_{\gamma} f(z)\,dz = 0$ pour tout lacet γ de Ω.*

Ce théorème nous permet ensuite de caractériser les ouverts où une détermination holomorphe du logarithme existe de la manière suivante :

Corollaire 4.18. *Soit Ω un ouvert qui ne contient pas 0. Il existe une détermination holomorphe du logarithme sur Ω si et seulement si* $\mathrm{Ind}(0,\gamma) = 0$ *pour tout lacet γ de Ω.*

Proposition 4.19. *Soit Ω un ouvert étoilé, f une fonction holomorphe sur Ω qui ne s'annule pas : $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Alors il existe une détermination holomorphe de* $\log f$ *sur Ω.*

5 Analyticité, zéros, maximum

5.1 Analyticité des fonctions holomorphes

Les fonctions analytiques sont les sommes des séries entières.

Définition 5.1. *Soit f une fonction définie sur un ouvert Ω. On dit que f est analytique en un point $z_0 \in \Omega$ s'il existe une série entière $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ de rayon de convergence > 0 telle qu'on ait*

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$$

au voisinage de z_0.

Nous avons vu que les fonctions analytiques sont holomorphes. Nous pouvons déterminer les coefficients a_n en fonctions des dérivées de f.

Proposition 5.2. *Soit f une fonction analytique en z_0 : $f(z) = \sum\limits_{n\geq 0} a_n (z - z_0)^n$. Nous avons*

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}.$$

Il se trouve que toute fonction holomorphe est analytique. Ainsi, pour les fonctions d'une variable complexe, les notions d'holomorphie et d'analyticité coïncident.

Théorème 5.3. *Une fonction holomorphe est analytique en tout point. Plus précisément, si f est holomorphe sur $D(z_0, r)$ alors f est dévéloppable en série entière en z_0 et le rayon de convergence de la série entière est au moins égal à r. De plus, f est égale à la somme de la série entière sur tout le disque $D(z_0, r)$.*

5.2 Principe des zéros isolés

Commençons par montrer le résultat préliminaire suivant.

Proposition 5.4. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω et $a \in \Omega$. Si f et toutes ses dérivées s'annulent en a (i.e. $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout $n \geq 0$), alors f est identiquement nulle.*

Définissons maintenant l'ordre d'un zéro de f.

Définition 5.5. *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω et $a \in \Omega$ un zéro de f. L'ordre de a en tant que zéro de f, ou sa multiplicité, est l'ordre de la première dérivée non nulle de f en a. Si toutes les dérivées s'annulent en a, l'ordre est dit infini.*

L'ordre de a en tant que zéro de f est donc l'entier m caractérisé par la propriété suivante :

$$f(a) = f'(a) = \ldots f^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad f^{(m)}(a) \neq 0.$$

Fin du cours du 20/02/2023.

Par la proposition 5.4, les zéros d'une fonction holomorphe non identiquement nulle sont tous d'ordre fini. Nous pouvons montrer aisément le résultat de factorisation suivant.

Proposition 5.6 (Factorisation)**.** *Soit Ω un ouvert, f une fonction holomorphe sur Ω. On a que a est un zéro d'ordre m si et seulement s'il existe une fonction g holomorphe sur Ω telle que $g(a) \neq 0$ et $f(z) = (z-a)^m g(z)$.*

Voici maintenant le principe des zéros isolés.

Théorème 5.7 (Principe des zéros isolés)**.** *Soit Ω un ouvert connexe et f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur Ω. Alors les zéros de f sont isolés.*

Ainsi, une suite injective de zéros de d'une fonction holomorphe non identiquement nulle peut s'accumuler ou bien à l'infini ou bien sur le bord de Ω mais jamais à l'intérieur. Exemples : les zéros de la fonction $e^z - 1$ tendent vers l'infini, ceux de $e^{\frac{1}{z}} - 1$ tendent vers 0 qui n'est pas dans le domaine de définition de la fonction.

Le principe des zéros isolés porte parfois le nom de principe de prolongement analytique car il permet de montrer le résultat suivant.

Proposition 5.8 (Principe du prolongement analytique)**.** *Soit Ω un ouvert connexe et f, g deux fonctions holomorphes. On suppose qu'il existe une suite injective z_n qui converge vers un point de Ω et telle que $f(z_n) = g(z_n)$ pour tout n. Alors $f \equiv g$.*

Ainsi, il suffit de connaître les valeurs d'une fonction holomorphe sur une telle suite pour connaître les valeurs sur tout l'ouvert Ω, c'est-à-dire la prolonger à Ω.

5.3 Principe du maximum

En général, la valeur absolue d'une fonction holomorphe ne peut pas avoir de maximum local à l'intérieur du domaine de définition.

Théorème 5.9 (principe du maximum)**.** *Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω. Si $|f|$ admet un maximum local en un point de Ω, alors f est constante.*

Soit f une fonction holomorphe qui n'est pas constante et z_n une suite telle que $|f(z_n)| \to \sup_\Omega |f(z)|$. Si z_n est non bornée, alors il existe une sous-suite z_{n_k} qui tend vers l'infini. Le sup de $|f|$ s'obtient dans ce cas à l'infini. Si z_n est bornée, alors il existe une sous-suite z_{n_k} qui converge vers un élément a. Comme f n'est pas constante, $a \notin \Omega$. Donc $a \in \overline{\Omega} \setminus \Omega = \partial\Omega$. Dans ce cas, le sup de $|f|$ s'obtient sur le bord. On peut ainsi dire de manière un peu formelle (car on ne sait si f a une trace au bord ou une limite à l'infini) que $|f|$ admet son sup à l'infini ou sur le bord de l'ouvert de définition. Voici maintenant un énoncé rigoureux.

Proposition 5.10. *Soit Ω un ouvert borné, f une fonction holomorphe sur Ω et continue sur $\overline{\Omega}$. Alors*
$$\sup_{z\in\Omega}|f(z)| = \max_{z\in\partial\Omega}|f(z)|.$$

6 Singularités et résidus

6.1 Séries de Laurent

Les séries de Laurent jouent le rôle de série entière pour les fonctions qui sont définies sur des couronnes circulaires. Définissons d'abord ce que c'est une série de Laurent.

Définition 6.1. *Une série de Laurent est une série de la forme*
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n.$$
Une série de Laurent est dite convergente si les deux séries
$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{et} \quad \sum_{n=-1}^{-\infty} a_n z^n$$
convergent. La somme de la série de Laurent est la somme de ces deux séries.

Les fonctions définies sur des couronnes circulaires admettent des développements en série de Laurent. Montrons d'abord le lemme suivant.

Lemme 6.2. *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne circulaire $C(a,r_1,r_2) = \{z\ ;\ r_1 < |z-a| < r_2\}$ où $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$. Pour $r \in]r_1,r_2[$, l'intégrale $\int\limits_{C(a,r)} f(z)\,dz$ ne dépend pas de r.*

Nous avons le résultat suivant sur l'existence du développement en série de Laurent.

Théorème 6.3 (Développement en série de Laurent)**.** *Soit f une fonction holomorphe dans la couronne circulaire $C(a,r_1,r_2) = \{z\ ;\ r_1 < |z-a| < r_2\}$ où $0 \le r_1 < r_2 \le \infty$. Il existe une série de Laurent $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ qui converge sur la couronne $C(a,r_1,r_2)$ et dont la somme vaut $f(z)$:*
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n.$$
De plus, les coefficients a_n sont uniquement déterminés par la formule
$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}\,dz$$
où $r \in]r_1,r_2[$ est arbitraire. En particulier, l'intégrale au-dessus ne dépend pas de r. Enfin, la série de Laurent converge uniformément sur tout compact de la couronne $C(a,r_1,r_2)$.

Sur une couronne donnée, le développement en série de Laurent est uniquement déterminé car on connaît la formule des coefficients a_n. Par contre, sur des couronnes différentes on peut avoir des développements en série de Laurent différents pour la même fonction. Exemple avec $\frac{1}{z^2-z}$ sur les couronnes $C(0,0,1)$ et $C(0,1,\infty)$. Cependant, sur deux couronnes de même centre et non-disjointes le développement en série de Laurent est le même.

La preuve du théorème 6.3 montre en fait un peu plus : la série $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ converge uniformément sur les compacts du disque $\{|z-a| < r_2\}$ (c'est par conséquent holomorphe sur ce disque) et la série $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1} a_n(z-a)^n$ converge uniformément sur les compacts de l'ensemble $\{|z-a| > r_1\}$ (c'est par conséquent holomorphe sur cet ensemble).

La partie $\sum\limits_{n=-\infty}^{-1}$ du développement en série de Laurent est dite partie singulière. La partie $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}$ est dite partie régulière.

6.2 Singularités isolées

Définition 6.4. *On dit que le point a est une singularité isolée de la fonction f s'il existe $r > 0$ tel que f soit holomorphe dans le disque pointé $\dot{D}(a,r) = D(a,r) \setminus \{a\} = \{z\ ;\ 0 < |z-a| < r\}$.*

Les singularités isolées peuvent être de trois types :

a) a est dite singularité artificielle (ou fausse singularité) si f est bornée au voisinage de a ;

b) a est un pôle si $\lim\limits_{z\to a} |f(z)| = +\infty$;

c) a est une singularité essentielle si $|f|$ est non-bornée au voisinage de a mais ne tend pas vers l'infini en a.

Remarquons que le développement en série de Laurent dans un disque pointé ne dépend pas du rayon du disque.

Nous pouvons caractériser le type de point singulier à l'aide du développement en série de Laurent au voisinage du point.

Théorème 6.5. *Soit a une singularité isolée de la fonction f et $f(z) = \sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-a)^n$ le développement en série de Laurent de f dans le disque pointé $\dot{D}(a,r)$. Alors*

a) a est une fausse singularité $\Leftrightarrow a_n = 0$ pour tout $n < 0 \Leftrightarrow f$ se prolonge en une fonction holomorphe en a.

b) a est un pôle si et seulement si il existe $m \geq 1$ tel que $a_n = 0$ pour tout $n \leq -m-1$ et $a_{-m} \neq 0$ (c'est-à-dire que le développement en série de Laurent commence à $-m$). On dit alors que a est un pôle d'ordre m (pôle simple si $m = 1$, double si $m = 2$, triple si $m = 3$, etc.). De plus, a est un pôle d'ordre m si et seulement si on peut écrire f sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^m}$ où g est holomorphe en a et $g(a) \neq 0$.

c) a est une singularité essentielle si et seulement si le développement en série de Laurent va effectivement jusqu'à $-\infty$: il existe une suite $n_k \to -\infty$ telle que $a_{n_k} \neq 0$. De plus, a est une singularité essentielle si et seulement si l'image par f de tout voisinage de a est dense dans $\mathbb{C}$.

Fin du cours du 27/02/2023.

Un exemple de singularité essentielle est donnée par 0 pour la fonction $e^{\frac{1}{z}}$.

6.3 Théorème des résidus

Définition 6.6. *Soit a une singularité isolée de la fonction f. Le résidu de f en a, $\mathrm{Res}(f,a)$, est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de Laurent de f dans un disque pointé $\dot{D}(a,r)$.*

Attention, il ne faut pas se tromper de développement de Laurent. En effet, la série de Laurent dépend de la couronne considérée. Par exemple $\mathrm{Res}(\frac{1}{z^2-z}, 0) = -1$ mais le coefficient de $\frac{1}{z}$ dans le développement de Laurent valable pour $|z| > 1$ est 0.

Il est très important de bien savoir calculer un résidu. Voici quelques méthodes de calcul.

— Dans le cas d'un pôle simple nous avons que

$$\operatorname{Res}(f,a) = \big[(z-a)f(z)\big]\big|_{z=a} = \lim_{z\to a}(z-a)f(z).$$

Si $f = \frac{g}{h}$ avec $g(a) \neq 0$ alors

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{g(a)}{h'(a)}.$$

— Dans le cas d'un pôle multiple, d'ordre m, nous avons de même

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{1}{(m-1)!}\big[(z-a)^m f(z)\big]^{(m-1)}(a).$$

Cette dérivée étant parfois difficile à calculer, il est souvent plus facile de procéder par identification des coefficients de la manière suivante. On écrit $f = \frac{g}{h}$ avec g, h holomorphes en a. L'ordre de a comme pôle de f est la différence entre l'ordre de a comme zéro de h et l'ordre de a comme zéro de g. Puis on écrit

$$f = \frac{g}{h} = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \dots$$

d'où

$$g = h\Big(\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{z-a} + \dots\Big).$$

Maintenant on remplace g et h par leurs développements en série entière (seuls les m premiers termes sont nécessaires), on développe le produit à droite et on identifie les coefficients. Cela donne un système d'équations très facile à résoudre, ce qui nous permet de trouver a_{-1} qui est le résidu cherché. Pour simplifier encore plus les calculs, on fera le changement de notation $u = z - a$ et on développera en puissances de u.

Exemples.

a) Nous avons que $\operatorname{Res}(\frac{e^z}{z^2+1}, i) = \frac{e^i}{2i}$ (pôle simple).

b) Tous les résidus de $\frac{z^3}{z^4+1}$ sont égaux à $\frac{1}{4}$ (pôles simples).

c) De même, tous les résidus de $\operatorname{cotan} z$ sont 1 (pôles simples).

d) Les pôles de $\frac{e^{iz}}{1+\cos z}$ sont tous doubles et les résidus sont tous $-2i$.

e) Le résidu de $\frac{2z+3}{(z-1)^3 e^z}$ en 1 est $\frac{1}{2e}$ (pôle triple).

Voici maintenant le théorème des résidus, le théorème le plus important de cette partie sur les fonctions holomorphes.

Théorème 6.7 (théorème des résidus)**.** *Soit Ω un ouvert étoilé, f une fonction holomorphe sur Ω sauf en un nombre fini de points $a_1, a_2, \dots, a_k$ et γ un lacet tracé sur Ω qui ne passe pas par les singularités de f. Nous avons que*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} \operatorname{Res}(f, a_j)\operatorname{Ind}(a_j, \gamma)$$

Remarques.

a) Dans la somme au-dessus, seules les singularités de f situées à l'intérieur de la courbe γ apparaissent (les autres disparaissent car l'indice est nul). En fait, nous n'avons pas vraiment besoin que f admette un nombre fini de singularités dans Ω. Il faut seulement avoir un nombre fini de singularités à l'intérieur de la courbe γ. Par compacité, cela est toujours vrai si la fonction f n'admet que des singularités isolées.

b) Dans le cas d'une courbe simple orientée dans le sens direct, le théorème des résidus s'écrit sous la forme

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{a_j \in \mathrm{int}(\gamma)} \mathrm{Res}(f, a_j).$$

6.4 Exemples de calculs d'intégrales

Le théorème des résidus fournit une méthode de calculs pour des diverses intégrales (classiques). Voici plusieurs exemples.

1. Les intégrales de la forme

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)\,dt$$

où $R(x, y)$ est une fraction rationnelle en x et y qui ne s'annule pas sur le cercle unité.
Pour calculer I on cherche une fonction f holomorphe avec des singularités isolées telle que

$$I = \int_{|z|=1} f(z)\,dz.$$

En notant $z = e^{it}$ on a que $\cos t = \frac{1}{2}(z + \frac{1}{z})$ et $\sin t = \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})$. On trouve facilement

$$f(z) = \frac{1}{iz} R\Big(\frac{1}{2}(z + \frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z - \frac{1}{z})\Big).$$

On remarque que f est une fraction rationnelle. On conclut donc par le théorème des résidus que

$$I = 2\pi i \sum_{\substack{z_j \text{ pôle de } f \\ |z_j|<1}} \mathrm{Res}(f, z_j).$$

Nous trouvons par exemple la formule suivante :

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2 - 2a\cos t + 1}\,dt = \frac{2\pi}{|a^2 - 1|}$$

pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$.

2. Les intégrales de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,dx$$

où R est une fraction rationnelle sans singularités réelles et telle que $\lim\limits_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$.

Dans ce cas on applique le théorème des résidus à la fonction $R(z)$ sur le lacet donné par l'union de $\gamma_1 = [-A, A]$ et $\gamma_2 = \{Ae^{it}\ , 0 \leq t \leq \pi\}$. On fait ensuite $A \to \infty$ et on trouve la formule suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_j \text{ pôle de } R \\ \mathrm{Im}(z_j) > 0}} \mathrm{Res}(R, z_j).$$

Exemple :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\, dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. Les intégrales de la forme

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix}\, dx$$

où R est une fraction rationnelle sans singularités réelles et telle que $\lim\limits_{|z|\to\infty} zR(z) = 0$.

Comme au-dessus on trouve

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{ix}\, dx = 2\pi i \sum_{\substack{z_j \text{ pôle de } Re^{iz} \\ \mathrm{Im}(z_j) > 0}} \mathrm{Res}(R(z) e^{iz}, z_j). \tag{6.1}$$

Si on sait calculer l'intégrale de $R(x)e^{ix}$, on sait aussi calculer l'intégrale de $R(x)\cos x$ (et celle de $R(x)\sin x$) : ou bien on prend la partie réelle si $R(x)$ est réelle ou bien en écrivant $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$. Attention, on ne peut pas appliquer directement la méthode de l'exemple 2. directement à la fonction $R(z)\cos z$ car celle-ci ne décroît pas sur γ_2 quand $A \to \infty$.

Fin du cours du 06/03/2023.

4. Les intégrales de la forme

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}\, dx$$

où $0 < \alpha < 1$ et R est une fraction rationnelle sans singularités sur $\mathbb{R}_+$ et telle que $\lim\limits_{|z|\to\infty} R(z) = 0$.

Dans ce cas nous appliquons le théorème des résidus à la fonction $\frac{R(z)}{z^\alpha}$ qui est holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ (avec des singularités isolées) où on définit $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$ et le logarithme est défini sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ en prenant l'argument dans l'intervalle $]0, 2\pi[$. Le lacet utilisé est l'union des courbes suivantes :

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \{Ae^{it}\ ;\ \eta \leq t \leq 2\pi - \eta\}, \\
\gamma_2 &= \{te^{-i\eta}\ ;\ \varepsilon \leq t \leq A\}, \\
\gamma_3 &= \{\varepsilon e^{it}\ ;\ \eta \leq t \leq 2\pi - \eta\}, \\
\gamma_4 &= \{te^{i\eta}\ ;\ \varepsilon \leq t \leq A\}.
\end{aligned}$$

Après avoir appliqué le théorème des résidus, on fait d'abord $\eta \to 0$, puis $\varepsilon \to 0$ et $A \to \infty$. On obtient à la fin la formule suivante

$$\int_0^{+\infty} \frac{R(x)}{x^\alpha}\, dx = \frac{\pi e^{i\alpha\pi}}{\sin(\pi\alpha)} \sum_{\substack{z_j \text{ pôle de } \frac{R(z)}{z^\alpha} \\ z_j \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+}} \mathrm{Res}\left(\frac{R(z)}{z^\alpha}, z_j\right).$$

7 Applications

Le théorème des résidus est le résultat le plus important du cours de fonctions holomorphes. Voici quelques applications de ce théorème.

7.1 Théorème de Rouché

Une application inattendue du théorème des résidus est le comptage des zéros d'une application holomorphe. Nous avons le théorème suivant :

Théorème 7.1 (Rouché)**.** *Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert étoilé Ω. Soit γ un lacet simple tracé sur Ω orienté dans le sens direct qui ne contient pas des zéros de f et g. On note par $Z(f,\gamma)$ le nombre de zéros de f situés à l'intérieur de γ comptés avec leurs multiplicités (un zéro d'ordre m compte pour m zéros).*

a) Nous avons que

$$Z(f,\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz.$$

b) Si $|f-g| < |f|$ sur γ alors $Z(f,\gamma) = Z(g,\gamma)$.

Application : tout polynôme de degré n admet exactement n racines (comptées avec leurs multiplicités).

7.2 Théorème de l'application ouverte

Une fonction holomorphe non-constante est ouverte (c'est-à-dire qu'elle envoie les ouverts en des ouverts).

Théorème 7.2 (Théorème de l'application ouverte)**.** *Soit Ω un ouvert connexe et f une application holomorphe sur Ω qui n'est pas constante. Alors f est ouverte : pour tout U ouvert de Ω nous avons que $f(U)$ est ouvert.*

On ne voit pas le rapport, pourtant ce théorème est une conséquence du théorème de Rouché (donc du théorème des résidus).

Remarque. On montre en fait une affirmation plus précise. Si $f(z_0) = w_0$ et si w est suffisamment proche de w_0, alors dans un petit voisinage de z_0 l'équation $f(z) = w$ admet exactement m racines où m est la multiplicité de z_0 en tant que zéro de $f - w_0$.

7.3 Théorèmes d'inversion locale et globale

Les biholomorphismes sont le pendant des difféomorphismes pour les fonctions holomorphes.

Définition 7.3. *Un biholomorphisme entre deux ouverts Ω_1 et Ω_2 de $\mathbb{C}$ est une application $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ holomorphe, bijective et telle que f^{-1} est holomorphe.*

Les fonctions holomorphes étant de classe C^1 en tant que fonctions de deux variables réelles, on peut se placer dans $\mathbb{R}^2$ et leur appliquer les théorèmes d'inversion locale et globale. Dans le cadre des fonctions holomorphes, les théorèmes d'inversion locale et globale s'énoncent sous la forme suivante.

Théorème 7.4 (Théorème d'inversion locale)**.** *Soit f une fonction holomorphe dans un ouvert Ω. Soit $z_0 \in \Omega$ tel que $f'(z_0) \neq 0$. Il existe U voisinage ouvert de z_0 et V voisinage ouvert de $f(z_0)$ tels que f est un biholomorphisme de U dans V.*

Le théorème de l'application ouverte et le théorème d'inversion locale nous permettent de montrer le théorème d'inversion globale suivant.

Théorème 7.5 (Théorème d'inversion globale)**.** *Soit f une fonction holomorphe et injective sur Ω. Alors $f(\Omega)$ est un ouvert et f est un biholomorphisme de Ω dans $f(\Omega)$.*

La preuve du théorème d'inversion globale montre le fait remarquable suivant : une fonction holomorphe injective est de dérivée non-nulle. À comparer avec le cas réel où la fonction x^3 est injective mais de dérivée nulle en 0. De même, dans $\mathbb{R}$ une fonction de dérivée non-nulle est injective mais cela n'est plus vrai dans $\mathbb{C}$. En effet, l'exponentielle est de dérivée non-nulle mais elle n'est pas injective puisque périodique.

Application. Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ de partie réelle > 1, l'équation $e^{-z} + z - \lambda = 0$ admet exactement une solution z_λ de partie réelle > 0. De plus, z_λ dépend de manière holomorphe de λ.

7.4 Transformations conformes

Par définition, une application conforme est une application qui préserve les angles. Il se trouve que les applications holomorphes sont des applications qui préservent les angles. De plus, elles préservent aussi leur orientation. Plus précisément, si l'on prend deux courbes qui se croisent en un point alors l'angle entre leurs images par une fonction holomorphe (c'est-à-dire l'angle entre les tangentes aux courbes) et son orientation sont les mêmes que pour les courbes de départ. On peut aussi montrer la réciproque : les fonctions holomorphes sont exactement les fonctions qui préservent les angles et leur orientation. Attention, si l'orientation n'est pas préservée alors la fonction n'est pas forcément holomorphe. Par exemple, la fonction $z \mapsto \overline{z}$ est une symétrie donc conserve les angles mais ce n'est pas une fonction holomorphe.