Analyse

Master Mathématiques Générales, 1ère année
Université Lyon 1

Dragoș Iftimie

Table des matières

Mise à jour le 13 décembre 2021.

1 Espaces de Banach

1.1 Rappels et compléments de topologie

Définition 1.1 (espace topologique)**.** *Une topologie sur un ensemble X est une famille de sous-ensembles de X qui contient $\emptyset$ et X et qui est stable par union arbitraire et intersection finie. Les éléments de la topologie sont appelés ouverts. Un espace topologique est un ensemble muni d'une topologie.*

Les ensembles fermés sont, par définition, les complémentaires des ouverts.

Une base d'ouverts est une famille d'ouverts avec la propriété que tout ouvert est union d'ouverts de la base d'ouverts. Elle détermine complètement la topologie puisque les ouverts seront exactement toutes les unions possibles d'éléments de la base d'ouverts. On remarque cependant qu'une famille arbitraire d'ensembles n'est pas forcément base d'ouverts pour une certaine topologie. Par exemple, si $A, B \subset X$ alors l'ensemble $\{\emptyset, A, B, X\}$ est base d'ouverts pour une topologie ssi $A \subset B$ ou bien $B \subset A$ ou bien $A \cap B = \emptyset$.

Une base de voisinages de x est une famille de voisinages $\mathscr{M}$ avec la propriété que pour tout voisinage B de x il existe un voisinage A de $\mathscr{M}$ tel que $x \in A \subset B$.

Une application $f : X \to Y$ est dite continue si l'image inverse par f de tout ouvert de Y est un ouvert de X : pour tout U ouvert de Y on a que $f^{-1}(U)$ est un ouvert de X.

Définition 1.2 (produit d'espaces topologiques)**.** *Soit $(X_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. On appelle ouvert élémentaire un ensemble de la forme $\prod\limits_{i\in I} U_i$ où chaque U_i est un ouvert de X_i et on a, de plus, que $U_i = X_i$ sauf pour un nombre fini d'indices. L'espace produit est $X = \prod\limits_{i\in I} X_i$ muni de la topologie dont une base d'ouverts est formée des ouverts élémentaires.*

Proposition 1.3. *Les ouverts élémentaires forment bien une base d'ouverts pour une certaine topologie (plus précisément la topologie produit existe).*

On vérifie aisément que la topologie produit est la topologie la moins fine (c'est-à-dire celle avec le moins d'ouverts) qui rend toutes les projections p_i continues :

$$p_i : \prod_{i\in I} X_i \to X_i, \quad p_i(x) = x_i \text{ où } x = (x_i)_{i\in I}.$$

1.1.1 Espaces métriques

Définition 1.4 (distance, espace métrique)**.** *Soit X un ensemble. Une distance sur X est une application $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ vérifiant pour tout $x, y, z \in X$:*

i) *$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (séparabilité) ;*

ii) *$d(y, x) = d(x, y)$ (symétrie) ;*

iii) *$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (inégalité triangulaire).*

Un espace métrique est un couple (X, d) où X est un ensemble et d est une distance sur X.

Remarque. Nous avons l'inégalité triangulaire inverse suivante :

$$\forall x, y, z \in X,\ |d(x, y) - d(x, z)| \leq d(y, z).$$

Définition 1.5. *Soit (X, d) un espace métrique, soit $x \in X$ et soit $r \in \mathbb{R}_+^*$. On appelle boule ouverte (resp. boule fermée) de centre x et de rayon r l'ensemble*

$$\begin{aligned} B(x, r) &= \{y \in X,\ d(x, y) < r\} \\ \textit{resp.} \quad B_f(x, r) &= \{y \in X,\ d(x, y) \leq r\}. \end{aligned}$$

Les espaces métriques sont des espaces topologiques. Leur topologie admet comme base d'ouverts l'ensemble des boules ouvertes.

L'adhérence d'un ensemble A, noté par $\overline{A}$, est le plus petit fermé qui contient A. C'est aussi l'intersection de tous les fermés qui contiennent A, ou encore l'ensemble des limites de suites de A. De même, l'intérieur de A, noté par $\overset{\circ}{A}$, est le plus grand ouvert inclus dans A, ou encore l'union de tous les ouverts inclus dans A. Un point appartient à l'intérieur de A si et seulement s'il y toute une boule autour du point qui est dans A. Nous avons que A est fermé si et seulement s'il est égal à son adhérence. Il est ouvert si et seulement s'il est égal à son intérieur. Les notions d'adhérence et d'intérieur sont stables par inclusion. Nous avons que

$$\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

mais seulement

$$\overline{A} \cap \overline{B} \supset \overline{A \cap B}$$

en général.

Définition 1.6 (produit fini d'espaces métriques)**.** *Soient $(X_1, d_1), (X_2, d_2), \dots, (X_n, d_n)$ un nombre fini d'espaces métriques. Le produit de ces espaces métriques est l'ensemble $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ muni de la distance*

$$d(x, y) = d_1(x_1, y_1) + d_2(x_2, y_2) + \cdots + d_n(x_n.y_n).$$

On vérifie aisément que la topologie associé à cette distance est la topologie d'espace produit telle qu'elle a été définie dans la section précédente. C'est-à-dire qu'une base d'ouverts est donnée par les produits d'ouverts.

Si on a un nombre dénombrable d'espaces métriques, on peut encore définir un espace métrique produit.

Définition 1.7 (produit dénombrable d'espaces métriques)**.** *Soient $(X_k, d_k)_{k\in\mathbb{N}}$ un nombre dénombrable d'espaces métriques. Le produit de ces espaces métriques est l'ensemble $X = \prod_{k=0}^{\infty} X_k$ muni de la distance*

$$d(x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{d_k(x_k, y_k)}{1 + d_k(x_k, y_k)}.$$

Proposition 1.8. *a) L'application d définie au-dessus est une distance.*

b) La convergence pour cette distance est la convergence composante par composante : $x^n \to x$ quand $n \to \infty$ si et seulement si pour tout $k \in \mathbb{N}$ nous avons que $x_k^n \to x_k$ quand $n \to \infty$.

c) La topologie associée à cette distance est la topologie produit introduite dans la définition 1.2.

1.1.2 Espaces normés

Dans le reste de ce manuscrit, nous noterons par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 1.9 (espace vectoriel)**.** *Un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni de deux opérations :*

— *l'addition $+$ avec les propriétés suivantes :*
  - *elle est associative : $x + (y + z) = (x + y) + z$;*
  - *elle est commutative : $x + y = y + x$;*
  - *il existe un élément neutre x : $x + 0 = x$;*
  - *tout x admet un unique opposé $-x$: $x + (-x) = 0$.*

— *la multiplication par des scalaires $\lambda \in \mathbb{K}$ avec les propriétés suivantes :*
  - *$\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$;*

- $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$;
- $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$;
- $1 \cdot x = x$.

Définition 1.10 (norme, semi-norme, espace normé). *On appelle norme sur E une application de E dans $\mathbb{R}_+$ habituellement notée $\|\cdot\|$ vérifiant pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$*

a) $\|x\| = 0 \Rightarrow (x = 0)$ *(séparation) ;*

b) $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$ *(homogénéité) ;*

c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ *(inégalité triangulaire).*

Si l'on n'impose pas l'hypothèse de séparation on obtient une semi-norme. Un espace vectoriel normé est un couple $(E, \|\cdot\|)$ où E est un espace vectoriel et $\|\cdot\|$ est une norme sur E.

Un espace normé est aussi un espace métrique pour la distance $d(x, y) = \|x - y\|$. Nous avons la réciproque suivante de l'inégalité triangulaire :

$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leq \|x - y\|.$$

Définition 1.11 (normes équivalentes). *Deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont dites équivalentes s'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que*

$$\|x\|_1 \leq C_1\|x\|_2 \leq C_2\|x\|_1 \quad \forall x. \tag{1.1}$$

On vérifie aisément que deux normes équivalentes engendrent la même topologie.

1.1.3 Applications linéaires et continues. Dual

Proposition 1.12. *Soit $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Une application linéaire $f : E \to F$ est continue si et seulement si il existe une constante $M > 0$ telle que*

$$\forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E.$$

Corollaire 1.13. *Deux normes sur un espace vectoriel E définissent les mêmes ouverts si et seulement si elles sont équivalentes.*

Définition 1.14. *Les normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ étant fixées, on note $\mathscr{L}(E; F)$ l'espace des applications linéaires continues de E dans F. On appelle **dual topologique** de E et on note $E' = \mathscr{L}(E; \mathbb{K})$ l'espace des formes linéaires continues sur E.*

Proposition 1.15. *L'espace $\mathscr{L}(E; F)$ est un espace normé avec la norme suivante :*

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mathscr{L}(E;F)} = \sup_{x\neq 0} \frac{\|f(x)\|_F}{\|x\|_E} &= \sup_{\|x\|_E=1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E\leq 1} \|f(x)\|_F = \sup_{\|x\|_E<1} \|f(x)\|_F \\ &= \inf\{M \;;\; \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E\} = \min\{M \;;\; \forall x \in E, \|f(x)\|_F \leq M\|x\|_E\}.\end{aligned}$$

Nous avons toujours l'inégalité

$$\|f(x)\|_F \leq \|f\|_{\mathscr{L}(E;F)}\|x\|_E.$$

La norme d'une application linéaire et continue est d'ailleurs la plus petite constante C avec la propriété que

$$\|f(x)\|_F \leq C\|x\|_E.$$

Nous avons que la norme de la composition est majorée par le produit des normes.

Proposition 1.16. *Si $(E, \|\cdot\|_E)$, $(F, \|\cdot\|_F)$ et $(G, \|\cdot\|_G)$ sont trois espaces vectoriels normés alors pour $f \in \mathscr{L}(E; F)$ et $g \in \mathscr{L}(F; G)$ la composée $g \circ f$ appartient à $\mathscr{L}(E; G)$ et on a*

$$\|g \circ f\|_{\mathscr{L}(E;G)} \leq \|g\|_{\mathscr{L}(F;G)}\|f\|_{\mathscr{L}(E;F)}.$$

1.1.4 Complétude

Définition 1.17. — *Une suite x_n dans un espace métrique est dite de Cauchy si $d(x_n, x_m) \to 0$ quand $m, n \to \infty$. C'est-à-dire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \varepsilon$ pour tout $m, n \geq N$.*
— *Un espace métrique est dit complet si toute suite de Cauchy est convergente.*
— *Un espace de Banach est un espace normé complet.*

Un ensemble complet est toujours fermé. Dans un espace complet, les fermés sont complets (ou plutôt sont les complets).

Nous avons la caractérisation suivante de la complétude d'un espace normé en terme de séries.

Proposition 1.18. *Soit E un espace normé. L'espace E est complet si et seulement si toute série absolument convergente (c'est-à-dire si la série des normes converge) est convergente. C'est-à-dire E est un espace de Banach ssi on a l'implication suivante : $\sum_{n\geq 0} \|x_n\|$ converge implique $\sum_{n\geq 0} x_n$ converge.*

Nous avons enfin que le produit dénombrable d'espaces métriques complet est un espace métrique complet.

Théorème 1.19. *Un produit dénombrable d'espaces métriques complets est complet.*

1.1.5 Compacité

Définition 1.20 (compact)**.** *Un ensemble est dit compact si de tout recouvrement par des ouverts on peut extraire un sous-recouvrement fini. De manière équivalente, de toute suite de l'ensemble on doit pouvoir extraire une sous suite convergente dans l'ensemble.*

Voici quelques propriétés des compacts.

Proposition 1.21. *a) Un compact est toujours fermé et complet.*

b) L'image d'un compact par une application continue est un compact.

c) Une fonction réelle continue sur un compact est bornée et atteint ses bornes.

d) Une fonction continue sur un compact est uniformément continue.

Définition 1.22. *a) Un ensemble est dit relativement compact si son adhérence est compacte.*

b) Un ensemble est dit précompact si pour tout $\varepsilon > 0$ on peut le recouvrir d'un nombre fini de boules de rayon ε.

Proposition 1.23. *Un ensemble est compact ssi il est précompact et complet.*

De même, dans un espace complet précompact et relativement compact veut dire la même chose.

Enfin, produit de compacts est un compact.

Théorème 1.24. *Un produit dénombrable d'espaces métriques compacts est un espace métrique compact.*

En réalité, la compacité du produit reste vraie pour un produit quelconque, pas nécessairement dénombrable.

1.1.6 Dimension finie

Les espaces normés de dimension finie ont un certain nombre de propriétés qui les distinguent des autres espaces normés. En voici quelques-unes.

Théorème 1.25 (Bolzano-Weierstrass)**.** *Dans un espace normé de dimension finie, les ensembles compacts sont les ensembles fermés et bornés.*

On a aussi la réciproque.

Théorème 1.26 (Riesz)**.** *Soit* $(E, \| \cdot \|)$ *un espace normé (pas forcément de dimension finie). La boule unité fermée est compacte si et seulement si* E *est de dimension finie.*

Voici un théorème qui regroupe d'autres propriétés des espaces normés de dimension finie.

Théorème 1.27.

a) Dans un espace normé de dimension finie toutes les normes sont équivalentes.

b) Dans un espace normé quelconque, tout sous-espace vectoriel de dimension finie est fermé.

c) Toute application linéaire définie sur un espace normé de dimension finie à valeurs dans un espace normé quelconque (pas forcément de dimension finie) est continue.

1.2 Théorème de Baire et applications

Avec le théorème de Baire nous entrons dans le vif du sujet des espaces de Banach. Voici ce théorème :

Théorème 1.28 (Baire)**.** *Dans un espace métrique* ***complet****, toute intersection dénombrable d'ouverts denses est dense et, de manière équivalente, toute union dénombrable de fermés d'intérieur vide est d'intérieur vide.*

1.2.1 Théorème de Banach-Steinhaus

Une application très importante du théorème de Baire est le théorème de Banach-Steinhaus qui dit qu'une famille d'applications linéaires et continues définies sur un espace de Banach est bornée (en norme) si et seulement si elle est bornée ponctuellement.

Théorème 1.29 (Banach-Steinhaus)**.** *Soient* E *un espace de Banach et* F *un espace normé,* $(T_i)_{i \in I}$ *une famille d'applications linéaires et continues de* E *dans* F*. Nous avons l'équivalence entre les affirmations suivantes :*

a) La famille $(T_i)_{i \in I}$ *est bornée dans* $\mathscr{L}(E, F)$ *(c'est-à-dire il existe* $C > 0$ *tel que* $\|T_i\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq C$*).*

b) La famille $(T_i)_{i \in I}$ *est ponctuellement bornée (c'est-à-dire pour tout* $x \in E$ *la famille* $(T_i(x))_{i \in I}$ *est bornée : il existe* $C(x) > 0$ *tel que* $\|T_i(x)\|_F \leq C(x)$ *pour tout* $i \in I$*).*

Un corollaire immédiat dit que la limite simple (ou ponctuelle) d'une suite d'applications linéaires et continues sur un espace de Banach est une application linéaire et continue.

Corollaire 1.30. *Soient* E *un espace de Banach et* F *un espace normé,* $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite d'applications linéaires et continues de* E *dans* F*. On suppose que pour tout* x *la suite* $T_n(x)$ *converge vers un certain* $T(x)$*. Alors* T *est une application linéaire et continue et* $\|T\|_{\mathscr{L}(E,F)} \leq \liminf_{n \to \infty} \|T_n\|_{\mathscr{L}(E,F)}$*.*

Voici maintenant un cas particulier du théorème de Banach-Steinhaus.

Corollaire 1.31. *Soit* E *un espace de Banach. Un ensemble* $B' \subset E'$ *est borné dans* E' *si et seulement si pour tout* $x \in E$ *l'ensemble* $B'(x) = \{f(x) \ ; \ f \in B'\}$ *est borné.*

1.2.2 Théorème de l'application ouverte

Une application application très importante du théorème de Baire est le théorème de l'application ouverte qui affirme qu'une application linéaire, continue et surjective entre deux espaces de Banach est ouverte.

Théorème 1.32 (application ouverte)**.** *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire, continue et* ***surjective****. Alors T est ouverte, c'est-à-dire que l'image d'un ouvert par T est un ouvert.*

Un premier corollaire dit que toute application linéaire, continue et bijective entre deux Banach est nécessairement un homéomorphisme.

Corollaire 1.33. *Toute application linéaire, continue et bijective entre deux espaces de Banach est un homéomorphisme (c'est-à-dire que son inverse est aussi continue).*

Un deuxième corollaire affirme que, dans le cadre des espaces de Banach, la moitié de la condition (1.1) suffit pour avoir l'équivalence de deux normes.

Corollaire 1.34. *Soit E un espace vectoriel et $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ deux normes sur E telles que $(E, \|\cdot\|_1)$ et $(E, \|\cdot\|_2)$ sont des espaces de Banach. Si $\|\cdot\|_1 \le C\|\cdot\|_2$ pour une certaine constante C, alors les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.*

1.2.3 Théorème du graphe fermé

Un théorème très élégant affirme qu'une application linéaire entre deux Banach est continue si et seulement si son graphe est fermé.

Théorème 1.35. *Soient E et F deux espaces de Banach et $T : E \to F$ une application linéaire. Alors T est continue si et seulement si son graphe $\{(x, T(x))\ ;\ x \in E\}$ est fermé dans $E \times F$.*

Remarque. Il est facile de voir que le graphe d'une application T est fermé si et seulement si on a l'implication suivante :

$$x_n \to x \quad \text{et} \quad T(x_n) \to y \quad \Rightarrow \quad y = T(x).$$

Ainsi, une application linéaire entre deux Banach est continue si et seulement si l'implication au-dessus est vraie.

1.3 Théorèmes de Hahn-Banach

Nous supposerons dans cette partie que les espaces vectoriels considérés sont réel, *i.e.* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, sauf mention du contraire.

Le théorème de Hahn-Banach prend deux formes. Sous sa forme analytique il permet d'étendre les formes linéaires, qu'elles soient continues ou pas. Sa forme géométrique permet de construire des hyperplans qui séparent deux convexes donnés.

1.3.1 Forme analytique

Théorème 1.36 (Hahn-Banach, forme analytique)**.** *Soit E un espace vectoriel réel et $p : E \to \mathbb{R}$ une application qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E,\ \forall \lambda > 0$$
$$p(x+y) \le p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E.$$

Soit $f : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire définie sur un sous-espace vectoriel F de E qui est majorée par p :

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall x \in F.$$

Il existe une forme linéaire $g : E \to \mathbb{R}$ qui prolonge f et qui reste majorée par p :

$$g\big|_F = f \quad \text{et} \quad g(x) \leq p(x) \quad \forall x \in E.$$

La preuve de ce théorème fait appel au lemme de Zorn.

Lemme 1.37 (Zorn)**.** *Tout ensemble ordonné, inductif et non-vide admet un élément maximal.*

Le théorème de Hahn-Banach admet les corollaires suivants importants.

Corollaire 1.38. *Dans un espace normé, toute application linéaire et continue sur un sous-espace vectoriel admet une extension linéaire et continue à l'espace entier qui est de même norme.*

Corollaire 1.39. *Soit E un espace normé et $x_0 \in E$. Il existe $f_0 \in E'$ tel que $\|f_0\| = \|x_0\|$ et $f_0(x_0) = \|x_0\|^2$.*

Corollaire 1.40. *Soit E un espace normé. Pour tout $x \in E$ nous avons que*

$$\|x\| = \max_{f \in E', \|f\| \leq 1} |f(x)|$$

(en particulier le max existe). De plus, si $f(x) = f(y)$ pour tout $f \in E'$ alors $x = y$.

Corollaire 1.41. *Soit E un espace normé. On note par $E'' = (E')'$ le bidual de E (c'est-à-dire le dual du dual). Pour chaque $x \in E$ on définit*

$$T_x : E' \to \mathbb{R}, \quad T_x(f) = f(x).$$

Nous avons que $T_x \in E''$ et $\|T_x\| = \|x\|$.

L'application $x \mapsto T_x$ réalise ainsi un plongement isométrique de E dans son bideual E''. Lorsque ce plongement est surjectif, on dit que l'espace E est réfléxif. En d'autres mots, un espace normé est réfléxif s'il coïncide avec son bidual (via l'identification de x à T_x).

Définition 1.42. *Un espace normé est dit réfléxif si l'injection canonique $E \ni x \mapsto T_x \in E''$ est surjective.*

Voici un dernier corollaire.

Corollaire 1.43. *Soit E un espace normé et $B \subset E$. On a l'équivalence entre :*

a) B est borné dans E ;

b) B est faiblement borné dans E, c'est-à-dire que $f(B)$ est borné pour tout $f \in E'$.

Faisons maintenant un retour au cas complexe. La proposition suivante établit une correspondance entre le cas réel et le cas complexe pour les applications linéaires et continues.

Proposition 1.44. *Soit E un espace vectoriel complexe.*

a) Soit $f : E \to \mathbb{C}$ une forme linéaire et $u = \mathrm{Re}(f)$ sa partie réelle. Nous avons que

$$f(x) = u(x) - iu(ix) \quad \forall x \in E.$$

b) Réciproquement, si $u : E \to \mathbb{R}$ est $\mathbb{R}$-linéaire et f est définie par la formule au-dessus, alors f est $\mathbb{C}$-linéaire et $u = \mathrm{Re}(f)$.

c) Si E est normé, alors f est continue si et seulement si u est continue. De plus, $\|f\| = \|u\|$.

De toute évidence, cette proposition nous permet de ramener l'étude des applications linéaires et continues complexes au cas des applications linéaires et continues réelles. Ainsi, les corollaires 1.38–1.43 restent vrais dans le cas complexe.

1.3.2 Forme géométrique

La forme géométrique du théorème de Hahn-Banach permet de séparer deux convexes par un hyperplan.

Définition 1.45. *Un hyperplan dans un espace vectoriel E est un ensemble $\{f = \alpha\}$ où f est une forme linéaire sur E et $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Nous avons la caractérisation suivante des hyperplans fermés.

Proposition 1.46. *Un hyperplan $\{f = \alpha\}$ est fermé si et seulement si f est continue.*

Définissions maintenant la notion de séparation par un hyperplan.

Définition 1.47. *Aoient A et B deux ensembles dans un espace vectoriel normé E.*
- *On dit que l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens large si $f \leq \alpha$ sur A et $f \geq \alpha$ sur B.*
- *On dit que l'hyperplan $\{f = \alpha\}$ sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f \leq \alpha - \varepsilon$ sur A et $f \geq \alpha + \varepsilon$ sur B.*

La forme géométrique du théorème de Hahn-Banach est la suivante :

Théorème 1.48 (Hahn-Banach, forme géométrique)**.** *Soit E un espace vectoriel normé réel et A, B deux convexes non-vides disjoints.*

a) Si A est ouvert alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

b) Si A est compact et B est fermé alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.

La preuve de ce théorème repose sur deux lemmes. Le premier lemme étudie la jauge d'un convexe.

Lemme 1.49 (jauge d'un convexe)**.** *Soit E un espace normé réel et C un convexe ouvert qui contient 0. On définit la jauge de C par*

$$p(x) = \inf\{\alpha > 0 \ ; \ \frac{x}{\alpha} \in C\}.$$

La jauge de C a les propriétés suivantes :

$$\begin{gathered} p(\lambda x) = \lambda p(x) \quad \forall x \in E, \ \forall \lambda > 0 \\ p(x + y) \leq p(x) + p(y) \quad \forall x, y \in E \\ C = \{x \ ; \ p(x) < 1\} \\ \exists M > 0 \quad p(x) \leq M\|x\| \quad \forall x \in E. \end{gathered}$$

Un deuxième lemme nous permet de séparer au sens large un ouvert convexe et un point.

Lemme 1.50. *Soit E un espace normé réel, C un convexe ouvert et $x_0 \notin C$. Il existe $f \in E'$ tel que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.*

Voici maintenant un corollaire de la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.

Corollaire 1.51. *Soit E un espace normé, F un sous-espace vectoriel et $x \in E$. Nous avons l'équivalence entre les affirmations suivantes :*

a) $x \in \overline{F}$;

b) Si $f \in E'$ et $f = 0$ sur F alors $f(x) = 0$.

En particulier, F est non dense dans E si et seulement si il existe $f \in E'$ non identiquement nulle qui s'annule sur F.

1.4 Convergences faibles et théorème de Banach-Alaoglu (cas séparable)

Définition 1.52. *Soit E un espace normé sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.*

- *On dit que $x_n \to x$ faiblement dans E, et on note $x_n \rightharpoonup x$, si pour tout $f \in E'$ nous avons que $f(x_n) \to f(x)$.*
- *On dit que $f_n \to f$ faible$*$ dans E' si $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$ (c'est-à-dire si la suite converge simplement).*

Pour souligner la distinction entre la convergence en norme et les diverses convergences faibles, la convergence en norme est aussi appelée convergence forte car c'est une notion plus forte que la convergence faible.

Avec les notations du corollaire 1.41 sur l'injection de E dans son bidual E'', on voit aisément que la convergence faible de x_n vers x équivaut à la convergence faible$*$ de T_{x_n} vers T_x dans le bidual. Ainsi, les diverses propriétés qu'on démontrera sur la convergence faible$*$ auront des conséquences immédiates sur la convergence faible.

Voici maintenant une proposition qui regroupe quelques propriétés des convergences faibles.

Proposition 1.53. *Soit E un espace normé.*

a) Si $x_n \to x$ en norme (convergence forte) alors $x_n \rightharpoonup x$.

b) Si $f_n \to f$ en norme dans E' alors $f_n \to f$ faible$*$.

c) Si E est un Banach et $f_n \to f$ faible$*$ alors la suite f_n est bornée dans E' et $\|f\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|f_n\|$.

d) Si $x_n \rightharpoonup x$ alors la suite x_n est bornée et $\|x\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n\|$.

e) Si $f_n \to f$ fortement dans E' et $x_n \rightharpoonup x$ faiblement, ou bien si $f_n \to f$ faible$*$ avec E Banach et $x_n \to x$ fortement, alors $f_n(x_n) \to f(x)$.

Remarquons que sur un dual E' nous avons trois types de convergence : la convergence forte (en norme), la convergence faible$*$ et la convergence faible (sur l'espace normé E').

Ces trois types de convergence peuvent être tous distincts si la dimension est infinie. En dimension finie, ces trois convergences définissent cependant la même notion.

Proposition 1.54. *Soit E un espace normé de dimension finie. Nous avons que*

a) $x_n \rightharpoonup x$ si et seulement si $x_n \to x$ fortement ;

b) $f_n \to f$ faible$*$ si et seulement si $f_n \to f$ fortement.

Rappelons maintenant la notion d'espace séparable.

Définition 1.55. *Un espace normé est dit séparable s'il existe un sous-ensemble dénombrable et dense.*

Le théorème qui suit est la motivation principale pour introduire les notions de convergence faible. C'est la version en dimension infinie du théorème de Bolzano-Weierstrass qui dit qu'en dimension finie de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite convergente. En dimension infinie, cela reste plus ou moins vrai à ceci près que la suite extraite va converger faiblement et non fortement.

Théorème 1.56 (Banach-Alaoglu, cas séparable)**.** *Soit E un espace de Banach séparable. De toute suite bornée de E' on peut extraire une sous-suite qui converge faible$*$.*

Remarques.

- En utilisant le plongement isométrique d'un espace normé dans son bidual (voir le corollaire 1.41), on peut aisément déduire un résultat de compacité faible dans E : si E est réflexif et E' est séparable alors toute suite bornée de E admet une sous-suite qui converge faiblement.
- L'hypothèse de séparabilité est bien nécessaire pour que la conclusion de ce théorème reste vraie. En effet, sur l'espace ℓ^∞ des suites bornées muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, les projections P_n sur la n-ème composante définies par $x = (x_n)_{n\geq 1} \mapsto P_n(x) = x_n$ forment une suite bornée d'applications linéaires et continues qui n'admet pas de sous-suite convergente faible$*$.

1.5 Spectre des opérateurs bornés dans les espaces de Banach.

Soit E un espace de Banach réel ou complexe. On notera $\mathscr{L}(E)$ l'espace normé des applications linéaires et continues de E dans E et $\mathscr{L}_i(E)$ le sous-espace des applications linéaires, continues et inversibles de E dans E :

$$\mathscr{L}(E) = \{T : E \to E \ ; \ T \text{ linéaire et continue}\}$$
$$\mathscr{L}_i(E) = \{T : E \to E \ ; \ T \text{ linéaire et continue et } \exists S \in \mathscr{L}(E) \text{ tel que } S \circ T = T \circ S = I\}$$

Par le théorème de l'application ouverte, $T \in \mathscr{L}_i(E)$ si et seulement si $T \in \mathscr{L}(E)$ et T bijective.

Définition 1.57 (spectre, résolvante). *Soit $T \in \mathscr{L}(E)$. On définit $\sigma(T)$ le spectre de T par*

$$\sigma(T) = \textit{ spectre de } T \ = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \textit{ ne soit pas inversible dans } \mathscr{L}(E)\}.$$

L'ensemble résolvant $R(T)$ est le complémentaire du spectre :

$$R(T) = \textit{ensemble résolvant de } T = \mathbb{C} \setminus \sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C}; T - \lambda I \in \mathscr{L}_i(E)\}.$$

Pour $\lambda \in R(T)$ on définit la résolvante de T :

$$R_\lambda(T) = (T - \lambda I)^{-1}.$$

Proposition 1.58 (Identité de la résolvante). *Si $\lambda, \mu \in R(T)$ alors $R_\lambda - R_\mu = (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu$.*

Proposition 1.59. *Soit E un espace de Banach.*

a) Si $S \in \mathscr{L}(E)$, $\|S\| < 1$ alors $I - S$ est inversible, $(I-S)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} S^n$ et $\|(I-S)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|S\|}$.

b) $\mathscr{L}_i(E)$ est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$ et l'application $S \mapsto S^{-1}$ est continue de $\mathscr{L}_i(E) \to \mathscr{L}_i(E)$.

Théorème 1.60. *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathscr{L}(E)$. Le spectre $\sigma(T)$ est un compact de $\mathbb{K}$. Dans le cas complexe, le spectre est toujours non-vide.*

Proposition 1.61. *Soit E un espace de Banach et $T \in \mathscr{L}(E)$.*

a) Si T est inversible alors $\sigma(T^{-1}) = \{\frac{1}{\lambda}; \lambda \in \sigma(T)\}$.

b) Si P est un polynôme et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ alors $\sigma(P(T)) = P(\sigma(T))$.

2 Espaces de Hilbert

Les espaces de Hilbert sont essentiellement des espaces de dimension infinie qui ont un produit scalaire similaire à celui de $\mathbb{R}^n$. Définissons d'abord la notion de produit scalaire.

Définition 2.1. *Soit H un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Un produit scalaire sur H est une application $\langle \cdot, \cdot \rangle : H \times H \to \mathbb{K}$ avec les propriétés suivantes :*
- *pour tout x l'application $x \mapsto \langle x, y \rangle$ est linéaire ;*
- *pour tout x, y nous avons $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ (symétrie) ;*
- *pour tout x nous avons que $\langle x, x \rangle \geq 0$ avec égalité seulement si $x = 0$.*

Un espace vectoriel muni d'un produit scalaire est dit espace préhilbertien.

Remarques.
- Un produit scalaire a la propriété que $\langle x, \lambda y \rangle = \overline{\lambda} \langle x, y \rangle$. On dit que l'application $y \mapsto \langle x, y \rangle$ est antilinéaire.
- Dans certains ouvrages les rôles de x et y sont inversés, c'est-à-dire que le produit scalaire est défini comme étant linéaire en y et antilinéaire en x.

Exemples.
- L'espace $C^0([0,1]; \mathbb{C})$ muni de

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f \overline{g}$$

  est un espace préhilbertien.
- L'espace $L^2([0,1]; \mathbb{C})$ muni du même produit scalaire est aussi un espace préhilbertien.
- L'espace ℓ^2 des suites de carré sommable avec le produit scalaire

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \overline{y_n}$$

  est un espace préhilbertien.

Nous avons une inégalité de Cauchy-Schwarz en dimension infinie.

Proposition 2.2 (inégalité de Cauchy-Schwarz)**.** *Soit $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien. Alors*

a) Nous avons l'inégalité de Cauchy-Schwarz suivante

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

b) La quantité $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ définit une norme sur H.

c) Nous avons l'identité du parallélogramme suivante :

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\|^2 + \left\| \frac{x-y}{2} \right\|^2 = \frac{1}{2} (\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

La norme est définie à partir du produit scalaire mais on peut aussi retrouver le produit scalaire à partir de la norme. Cela se fait via l'identité de polarisation suivante :

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2}{4}$$

dans le cas réel et

$$\langle x, y \rangle = \frac{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x-iy\|^2 - i\|x+iy\|^2}{4}$$

dans le cas complexe.

Définition 2.3. *Un espace de Hilbert est un espace préhilbertien complet pour la norme associée.*

Dans les exemples précédents, C^0 avec le produit scalaire L^2 n'est pas un espace de Hilbert tandis que L^2 et ℓ^2 le sont.

2.1 Projection et orthogonal

Un théorème très important dans la théorie des espaces de Hilbert est le théorème de la projection qui dit que dans un espace de Hilbert, la distance à un convexe fermé est atteinte en exactement un point.

Théorème 2.4 (projection sur un convexe fermé)**.** *Soit H un espace de Hilbert et K un convexe fermé. Alors*

a) Pour tout $x \in H$ la distance $d(x, K) = \inf_{y \in K} \|x - y\|$ est atteinte en un unique point u. On appelle u la projection de x sur K et on note $u = P_K(x)$.

b) La projection $P_K(x)$ est caractérisée par la relation suivante

$$\forall y \in K \quad \mathrm{Re}(\langle x - P_K(x), y - P_K(x) \rangle) \leq 0.$$

c) La projection P_K est une application 1-Lipschitzienne.

Un sous-espace vectoriel fermé est un convexe fermé, on peut donc lui appliquer le théorème de la projection sur un convexe fermé. Nous obtenons alors le corollaire suivant.

Corollaire 2.5 (projection orthogonale sur un sous-espace fermé)**.** *Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel fermé. Alors la projection sur F est bien définie et on peut la caractériser par :*

$$u = P_F(x) \text{ si et seulement si } u \in F \text{ et } \langle x - u, v \rangle = 0 \ \forall v \in F.$$

On dit alors que $x - P_F(x) \perp F$ ($x - P_F(x)$ est orthogonal à F) et la projection P_F est appelée projection orthogonale sur F.

Définition 2.6. *Soit H un espace de Hilbert et $A \subset H$ un sous-ensemble. L'orthogonal de A, noté par $A^\perp$, est l'ensemble des x tels que $x \perp A$:*

$$A^\perp = \{x \in H \ ; \ \langle x, y \rangle = 0 \ \forall y \in A\}.$$

Remarque. Si F est un sous-espace vectoriel fermé dans un espace de Hilbert H, alors tout $x \in H$ se décompose de manière unique sous la forme $x = x_1 + x_2$ où $x_1 \in F$ et $x_2 \in F^\perp$. Nous avons de plus que $\|x\|^2 = \|x_1\|^2 + \|x_2\|^2$.

Proposition 2.7. *Soit H un espace de Hilbert et F un sous-espace vectoriel.*

a) Pour tour $A \subset H$, l'ensemble $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel fermé.

b) $F^\perp = (\overline{F})^\perp$.

c) $(F^\perp)^\perp = \overline{F}$.

d) $H = \overline{F} \oplus F^\perp$.

2.2 Dualité

Un résultat très important dans la théorie des espaces de Hilbert dit que le dual d'un espace de Hilbert est lui-même.

Théorème 2.8 (Riesz)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $f \in H'$. Il existe un unique $u \in H$ tel que $f(x) = \langle x, u \rangle$ pour tout $x \in H$. Nous avons de plus que $\|f\| = \|u\|$ et l'application $H' \ni f \mapsto u \in H$ est une bijection isométrique antilinéaire.*

Nous pouvons donc identifier H' à l'espace $\widehat{H}$ qui est le même chose que H à ceci prés que l'on a remplacé la loi λx par $\overline{\lambda} x$. En particulier tout espace de Hilbert est réflexif et cela mérite d'être énoncé à part.

Corollaire 2.9. *Tout espace de Hilbert est réflexif.*

Ainsi, le théorème de Banach-Alaoglu peut s'appliquer pour obtenir le corollaire suivant.

Corollaire 2.10. *Dans un espace de Hilbert séparable, de toute suite bornée on peut extraire une sous-suite faiblement convergente.*

2.3 Adjoint

Dans ce suit on note par $\mathscr{L}(H)$ l'ensemble des applications linéaires et continues (qu'on appelle aussi opérateurs) de H dans H. Montrons d'abord une proposition qui nous permet de définir l'adjoint.

Proposition 2.11 (définition et existence de l'adjoint)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $T \in \mathscr{L}(H)$. Il existe un unique opérateur $T^* \in \mathscr{L}(H)$ avec la propriété suivante :*

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle \quad \forall x, y.$$

De plus $\|T\| = \|T^*\|$. On appelle T^* l'adjoint de T.

L'adjoint pour les opérateurs joue le même rôle que la transposée pour les matrices.

Définition 2.12.
- *$T \in \mathscr{L}(H)$ est dit auto-adjoint si $T^* = T$.*
- *$T \in \mathscr{L}(H)$ est dit normal si $TT^* = T^*T$.*
- *$T \in \mathscr{L}(H)$ est dit unitaire si T est inversible et $T^* = T^{-1}$.*
- *$T \in \mathscr{L}(H)$ est dit positif s'il est auto-adjoint et $\langle Tx, x \rangle \geq 0$ pour tout x.*

Voici une proposition qui regroupe quelques propriétés de l'adjoint.

Proposition 2.13. *Soit H un espace de Hilbert et $S, T \in \mathscr{L}(H)$. Nous avons que*

a) $I^* = I$.

b) $(ST)^* = T^*S^*$.

c) $(T^*)^* = T$.

d) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$.

e) Si T est auto-adjoint alors $\|T\| = \sup_{\|x\| \leq 1} |\langle Tx, x \rangle|$.

2.4 Base hilbertienne

Définition 2.14. *Soit H un espace préhilbertien.*
- *Une famille $\{e_i\}_{i \in I}$ est dite orthogonale si $e_i \perp e_j$ pour tout $i \neq j$.*
- *Une famille $\{e_i\}_{i \in I}$ est dite orthonormale si elle est orthogonale et si $\|e_i\| = 1$ pour tout $i \in I$.*

Les familles orthonormales vérifient l'inégalité de Bessel suivante.

Proposition 2.15 (inégalité de Bessel)**.** *Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n \geq 1}$ une famille orthonormale. Alors cette famille est libre et on a l'inégalité de Bessel suivante :*

$$\sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2 \leq \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

Définissions maintenant la notion de base hilbertienne.

Définition 2.16. *Une base hilbertienne est une famille orthonormale totale (les combinaisons linéaires sont denses).*

Voici quelques propriétés d'une base hilbertienne.

Proposition 2.17. *Soit H un espace de Hilbert et $\{e_n\}_{n \geq 1}$ une famille orthonormale.*

a) La suite $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est une base hilbertienne si et seulement si nous avons l'égalité de Bessel-Parseval suivante :

$$\sum_{n \geq 1} |\langle x, e_n \rangle|^2 = \|x\|^2 \quad \forall x \in H.$$

b) On suppose que $\{e_n\}_{n \geq 1}$ est une base hilbertienne. Nous avons

$$\forall x \in H \qquad x = \sum_{n \geq 1} \langle x, e_n \rangle e_n$$

$$\forall x, y \in H \qquad \langle x, y \rangle = \sum_{n \geq 1} \langle x, e_n \rangle \overline{\langle y, e_n \rangle}.$$

Concernant l'existence des bases hilbertiennes, nous avons le résultat suivant d'existence dans le cas séparable.

Théorème 2.18. *Soit H un espace de Hilbert de dimension infinie. Alors H admet une base hilbertienne dénombrable $\{e_n\}_{n \geq 1}$ si et seulement si H est séparable.*

On peut montrer que les espaces de Hilbert non séparables ont aussi des bases hilbertiennes mais elles ne seront pas dénombrables. Il faut alors parler de familles sommables ce qui entraîne des difficultés supplémentaires. Étant donné que les espaces de Hilbert rencontrés en pratique sont en général séparables, nous nous passerons de ces complications.

2.5 Théorème de Lax-Milgram

Nous nous placerons dans toute cette partie dans le cas réel : $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Commençons par une définition.

Définition 2.19. *Soit E un espace normé et $a : E \times E \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire.*
- *a est dite continue s'il existe une constante $C > 0$ telle que $|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$ pour tout $x, y \in E$;*
- *a est dite symétrique si $a(x, y) = a(y, x)$ pour tout $x, y \in E$;*
- *a est dite coercive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $a(x, x) \geq \alpha\|x\|^2$ pour tout $x, y \in E$.*

Théorème 2.20 (Stampacchia). *Soit H un espace de Hilbert réel et a une forme bilinéaire, continue et coercive sur H. Soit $K \subset H$ un convexe fermé non-vide et $f \in H'$. Il existe un unique $u \in K$ avec la propriété suivante :*

$$a(u, v-u) \geq f(v-u) \quad \forall v \in K.$$

Si a est de plus symétrique, alors u est caractérisé par

$$u \in K \quad et \quad \frac{1}{2}a(u,u) - f(u) = \min_{v\in K}\big(\frac{1}{2}a(v,v) - f(v)\big).$$

Lorsque $K = H$ on obtient comme cas particulier le théorème de Lax-Milgram suivant.

Théorème 2.21 (Lax-Milgram). *Soit H un espace de Hilbert réel, a une forme bilinéaire, continue et coercive sur H et $f \in H'$. Il existe un unique $u \in H$ avec la propriété suivante :*

$$a(u, v) = f(v) \quad \forall v \in H.$$

Si a est de plus symétrique, alors u est caractérisé par

$$\frac{1}{2}a(u,u) - f(u) = \min_{v\in H}\big(\frac{1}{2}a(v,v) - f(v)\big).$$

2.6 Diagonalisation des opérateurs compacts

Dans cette dernière partie nous allons voir que les opérateurs auto-adjoints (ou normaux dans le cas complexe) compacts ont la même propriété que les matrices symétriques en dimension finie : ils admettent une base de vecteurs propres.

Définissons d'abord la notion d'opérateur compact.

Définition 2.22. *Soient E et F deux espaces normés et $T : E \to F$. On dit que T est un opérateur compact si T est linéaire et si l'image de tout ensemble borné par T est relativement compacte.*

Remarque. Une application linéaire entre deux espaces normés est continue si et seulement si l'image de tout ensemble borné est un ensemble borné.

Proposition 2.23. *Soient E et F deux espaces normés et $T : E \to F$ linéaire.*

a) Si T est compact alors T est continu.

b) T est compact si et seulement si l'image de la boule unité est relativement compacte.

c) La composition entre un opérateur compact et un opérateur (continu) est un opérateur compact.

Nous aurons aussi besoin de la notion de somme hilbertienne d'espaces.

Définition 2.24. *Soit H un espace de Hilbert et H_n une famille au plus dénombrable de sous espaces vectoriels fermés. On dit que H est somme hilbertienne de H_n et on note $H = \bigoplus_n H_n$ si*

a) Les H_n sont orthogonaux deux à deux.

b) Le sous espace vectoriel engendré par les H_n est dense dans H.

Remarque. Comme pour les bases hilbertiennes, on peut montrer que si $H = \bigoplus_n H_n$ alors tout $x \in H$ s'écrit de manière unique comme somme d'une série (ou d'une somme finie le cas échéant) $x = \sum_n x_n$ où $x_n \in H_n$ pour tout n. Nous avons de plus que $x_n = P_{H_n}(x)$ la projection orthogonale de x sur H_n.

2.6.1 Cas d'un opérateur auto-adjoint

Nous allons montrer le théorème suivant.

Théorème 2.25. *Soit T un opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert séparable H qui n'est pas de dimension finie. Nous avons que*

a) Les sous-espaces propres associées à des valeurs propres non nulles sont de dimension finie.

b) Les valeurs propres non nulles sont ou bien en nombre fini ou bien forment une suite qui tend vers 0.

c) H est somme hilbertienne des sous-espaces propres.

d) Il existe une base hilbertienne $\{e_n\}$ formée de vecteurs propres correspondant à une suite de valeurs propres λ_n qui tend vers 0. Ainsi, pour tout $x \in H$ nous avons

$$x = \sum_{n\in\mathbb{N}} x_n e_n \quad \Longrightarrow \quad T(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n x_n e_n.$$

Dans la suite λ_n chaque valeur propre se répète autant de fois que sa multiplicité (la dimension du sous-espace propre).

Ce résultat se montre à l'aide de plusieurs lemmes.

Lemme 2.26. *Soit T un opérateur auto-adjoint compact sur un espace de Hilbert. Nous avons que $\|T\|$ ou $-\|T\|$ est valeur propre de T.*

Lemme 2.27. *Si T est normal alors $Ker(T) = Ker(T^*)$.*

Lemme 2.28. *Si A est métrique séparable et $B \subset A$, alors B est séparable.*

Lemme 2.29. *Soit T un opérateur normal compact sur un espace de Hilbert. Nous avons que*

a) Les sous-espaces propres sont orthogonaux deux à deux.

b) Les valeurs propres ne peuvent pas avoir de point d'accumulation différent de 0.

2.6.2 Cas d'un opérateur normal

Si l'espace de Hilbert est complexe, le même résultat reste vrai pour des opérateurs normaux compacts.

Théorème 2.30. *Nous avons le même énoncé que dans le théorème 2.25 avec les deux modifications suivantes :*

- *L'espace de Hilbert H est supposé complexe.*
- *L'opérateur T est supposé normal compact au lieu de auto-adjoint compact.*

Ce théorème se montre assez facilement à partir du cas auto-adjoint en décomposant

$$T = A + iB \quad \text{où} \quad A = \frac{T + T^*}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{T - T^*}{2i}.$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 2.31. *L'adjoint d'un opérateur compact est compact.*

Les opérateurs A et B sont auto-adjoints compacts et, T étant normal, ils commutent. Le théorème résulte alors du lemme suivant qui se montre sans difficulté particulière.

Lemme 2.32. *Soit H un espace de Hilbert séparable et S, T deux opérateurs auto-adjoints compacts qui commutent. Il existe une base hilbertienne de H formée de vecteurs propres de S et de T.*

3 Espaces L^p

Commençons par quelques rappels de théorie de la mesure.

3.1 Rappels

3.1.1 Théorie de la mesure et construction de l'intégrale

Dans tout ce chapitre nous travaillerons avec un espace mesuré $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$. Ici $\mathscr{T}$ désigne une tribu (c'est-à-dire une famille stable par passage au complémentaire et par union dénombrable) de l'ensemble Ω et μ une mesure qui sera toujours supposée σ-finie (c'est-à-dire qu'il existe une suite d'ensembles A_n avec $\Omega = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\mu(A_n) < \infty$).

Les exemples classiques de telles mesure sont les suivants :

— La mesure de Lebesgue définie sur la tribu de Borel dans $\mathbb{R}^n$ (la plus petite tribu qui contient les ouverts), finie sur les compacts et telle que la mesure d'un pavé $\prod\limits_{i=1}^{n}[a_i, b_i]$ est le produit $(b_1 - a_1)\dots(b_n - a_n)$. L'intégrale qui y est associée est l'intégrale usuelle des fonctions.

— La mesure de comptage définie sur les parties de $\mathbb{N}$ par $\mu(A) = \mathrm{card}(A)$ étant entendu que le cardinal vaut $+\infty$ pour un ensemble infini. L'intégrale associée est $\int f\,d\mu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f(n)$.

— Une mesure μ avec densité $\varphi \in L^1$ positive : $\mu = \varphi\,dx$ pour laquelle $\int f d\mu = \int f\varphi dx$.

— La masse de Dirac $\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ pour laquelle $\int f d\delta_a = f(a)$.

Les fonctions étagées sont les combinaisons linéaires de fonctions caractéristiques d'ensembles mesurables. Pour une telle fonction $f = \sum\limits_i \alpha_i \chi_{A_i}$ avec les A_i disjoints deux à deux et les α_i positifs on définit l'intégrale par

$$\int f\,d\mu = \sum_i \alpha_i \mu(A_i).$$

Si f est mesurable positive on pose

$$\int f\,d\mu = \sup\{\int g\,d\mu\ ;\ g \text{ étagée et } 0 \le g \le f\}.$$

On ainsi l'existence d'une suite croissante g_n de fonctions étagées positives qui convergent simplement vers f et $\int f\,d\mu = \lim\limits_{n\to\infty} \int g_n\,d\mu$. Remarquons aussi que l'intégrale d'une fonction mesurable positive est toujours définie mais elle n'est pas forcément finie.

Lorsque f est à valeurs réelles mais pas forcément positive, on pose $f_+ = \frac{f+|f|}{2}$ et $f_- = \frac{|f|-f}{2}$ de sorte que f_+ et f_- sont positives, $f = f_+ - f_-$ et $|f| = f_+ + f_-$. Les intégrales de f_+ et de f_- sont bien définies et on pose alors $\int f\,d\mu = \int f_+\,d\mu - \int f_-\,d\mu$. Enfin, lorsque f est à valeurs complexes on sait définir l'intégrale des parties réelles et complexes, donc par linéarité celle de f aussi.

On dit qu'une fonction mesurable est intégrable si l'intégrale de sa valeur absolue est finie. L'espace des fonctions intégrables est noté par $\mathscr{L}^1$. Mais on utilise en fait l'espace L^1 qui est le quotient de $\mathscr{L}^1$ par la relation d'équivalence de l'égalité presque partout. On définit aussi l'espace L^p des fonctions mesurables f définies presque partout telles que $\int |f|^p\,d\mu < \infty$. Si $p = \infty$ on note par L^∞ l'espace des fonctions bornées presque partout. On utilise les normes suivantes :

$$\|f\|_{L^p} = \left(\int |f|^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

si p est fini et

$$\|f\|_{L^\infty} = \min\{M\ ;\ |f(x)| \le M\ p.p.\ x\}$$

Voici quelques propriétés de l'intégrale

Proposition 3.1. *a) Si f et g sont intégrables et $f \leq g$ alors $\int f\,d\mu \leq \int g\,d\mu$.*

b) Si $|f| \leq g$ et $g \in L^1$ alors $f \in L^1$.

c) Si $f \in L^1$ alors $\left|\int f\,d\mu\right| \leq \int |f|\,d\mu$.

3.1.2 Interversion limite-intégrale

Une partie très importante du cours de théorie de la mesure consiste à étudier les interversions limite intégrale. Plus précisément, nous avons une suite de fonctions f_n qui convergent presque partout vers une fonction f et on voudrait savoir si l'intégrale de f_n converge vers celle de f.

Un premier résultat en ce sens est donné par le théorème de convergence monotone, ou Beppo-Levi, qui dit que ce passage à la limite peut toujours se faire lorsque la suite f_n est positive et monotone croissante (par rapport à n).

Théorème 3.2 (convergence monotone, Beppo-Levi)**.** *Soit $f_n \geq 0$ et $f_n \leq f_{n+1}$ pour tout n. Alors*

$$\int f_n\,d\mu \to \int \lim_{n\to\infty} f_n\,d\mu.$$

Notons que dans ce théorème les fonctions n'ont pas besoin d'être intégrables. Comme elles sont positives, l'intégrale est bien définie. La convergence des intégrales s'entend dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Le théorème suivant est le plus important de cette partie. Il affirme que le passage à la limite peut se faire moyennant une hypothèse de domination des f_n par une même fonction intégrable.

Théorème 3.3 (convergence dominée de Lebesgue)**.** *Soient f_n une suite de fonctions mesurables qui convergent presque partout vers une fonction f. On suppose de plus l'hypothèse de domination suivante : il existe une fonction $g \in L^1$ telle que $|f_n| \leq g$ pour tout n. Alors*

$$\int f_n\,d\mu \to \int f\,d\mu.$$

Le lemme de Fatou suivant peut aussi se révéler parfois utile l'avantage étant qu'il ne nécessite ni hypothèse de monotonie, ni hypothèse de domination, ni même hypothèse de convergence d'ailleurs.

Lemme 3.4 (Fatou)**.** *Soit $f_n \geq 0$ pour tout n. Alors*

$$\int \liminf_{n\to\infty} f_n\,d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int f_n\,d\mu.$$

3.1.3 Interversion intégrale-intégrale

Souvent nous avons besoin de permuter des intégrations par rapport à deux variables. Les deux théorèmes qui suivent nous permettent de le faire.

D'abord dans le cas positif nous n'avons aucune hypothèse à faire.

Théorème 3.5 (Fubini-Tonelli)**.** *Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ et $(\Omega', \mathscr{T}', \mu')$ deux espaces mésurés σ-finis. Soit $f : \Omega \times \Omega' \to \mathbb{R}_+$ une fonction positive et mesurable par rapport à la tribu produit. Alors*

$$\iint\limits_{\Omega\times\Omega'} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu'(y) = \int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega'} f(x,y)\,d\mu'(y)\Big)\,d\mu(x) = \int\limits_{\Omega'}\Big(\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,d\mu(x)\Big)\,d\mu'(y).$$

Sans positivité, il faut supposer que la fonction est intégrable par rapport à la mesure produit.

Théorème 3.6 (Fubini)**.** *Soient $(\Omega, \mathscr{T}, \mu)$ et $(\Omega', \mathscr{T}', \mu')$ deux espaces mésurés σ-finis. Soit $f : \Omega \times \Omega' \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable par rapport à la mesure produit. Alors*

$$\iint\limits_{\Omega\times\Omega'} f(x,y)\,d\mu(x)\,d\mu'(y) = \int\limits_{\Omega}\Big(\int\limits_{\Omega'} f(x,y)\,d\mu'(y)\Big)\,d\mu(x) = \int\limits_{\Omega'}\Big(\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,d\mu(x)\Big)\,d\mu'(y).$$

En particulier les intégrales partielles au-dessus convergent presque partout par rapport à l'autre variable.

3.1.4 Intégrales à paramètre

Nous considérons ici une fonction mesurable f dépendant d'un paramètre $\lambda \in E$: $f : E \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que pour tout $\lambda \in E$ l'application $x \mapsto f(\lambda, x)$ est mesurable. On se pose la question si les diverses propriétés de régularité de f par rapport au paramètre λ (continuité, dérivabilité, holomorphie) se transmettent à l'intégrale de f par rapport à x. Voici les critères correspondants. On supposera que tout ce qui est dit au-dessus est vrai et on ajoutera d'autres hypothèses.

Théorème 3.7 (dépendance continue des paramètres). *Ici E est un espace métrique. On suppose en plus que*

— *pour presque tout x l'application $\lambda \mapsto f(\lambda, x)$ est continue ;*

— *il existe une fonction intégrable g telle que $|f(\lambda, x)| \le g(x)$ pour tout $\lambda \in E$ et p.p. en x.*

Alors l'application

$$E \ni \lambda \mapsto \int_\Omega f(\lambda, x)\, d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

est continue.

Le théorème sur la dérivabilité est similaire à ceci près que la domination porte sur la dérivée.

Théorème 3.8 (dérivabilité par rapport aux paramètres). *Ici E est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose de plus que*

— *pour presque tout x l'application $\lambda \mapsto f(\lambda, x)$ est dérivable ;*

— *il existe une fonction intégrable g telle que $|\frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)| \le g(x)$ pour tout $\lambda \in E$ et p.p. en x.*

Alors l'application

$$E \ni \lambda \mapsto \int_\Omega f(\lambda, x)\, d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

est dérivable et

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \int_\Omega f(\lambda, x)\, d\mu(x) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial \lambda}(\lambda, x)\, d\mu(x).$$

En particulier, toutes les intégrales au-dessus sont bien définies.

Pour le critère d'holomorphie nous n'avons pas besoin de majorer la dérivée, la majoration de la fonction elle-même suffit. Mais cela n'a rien d'étonnant quand on se rappelle que les fonctions holomorphes ont la particularité que les valeurs de la dérivée se majorent par les valeurs de la fonction.

Théorème 3.9 (holomorphie par rapport aux paramètres). *Ici E est un ouvert de $\mathbb{C}$. On suppose de plus que*

— *pour presque tout x l'application $\lambda \mapsto f(\lambda, x)$ est holomorphe ;*

— *il existe une fonction intégrable g telle que $|f(\lambda, x)| \le g(x)$ pour tout $\lambda \in E$ et p.p. en x.*

Alors l'application

$$E \ni \lambda \mapsto \int_\Omega f(\lambda, x)\, d\mu(x) \in \mathbb{C}$$

est holomorphe et pour tout $n \ge 1$

$$\Big(\frac{\partial}{\partial \lambda}\Big)^n \int_\Omega f(\lambda, x)\, d\mu(x) = \int_\Omega \Big(\frac{\partial}{\partial \lambda}\Big)^n f(\lambda, x)\, d\mu(x).$$

Enfin, les propriétés de continuité, dérivabilité et holomorphie étant des propriétés locales, les majorations dans les trois critères au-dessus peuvent être supposées au voisinage d'un point seulement. Ou sur les compacts, ce qui revient au même.

3.2 Inégalités

Nous donnons dans cette partie quelques inégalités dans les espaces L^p qui nous seront utiles dans la suite.

Nous commençons par l'inégalité de Hölder qui nous dit dans quel espace L^p se trouve le produit de deux fonctions L^p.

Proposition 3.10 (inégalité de Hölder)**.** *Soient $1 \leq p, q, r \leq \infty$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $f \in L^p$ et $g \in L^q$ alors $fg \in L^r$ et*

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

Plus généralement, supposons que $1 \leq p_1, \dots, p_n, r \leq \infty$ vérifient $\frac{1}{r} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k}$. Si $f_k \in L^{p_k}$ alors le produit $f_1 \dots f_n \in L^r$ et

$$\|f_1 \dots f_n\|_{L^r} \leq \prod_{k=1}^{n} \|f_k\|_{L^{p_k}}.$$

L'inégalité de Minkowski suivante nous permet d'affirmer que les L^p sont des espaces normés.

Proposition 3.11 (inégalité de Minkowski)**.** *Soit $1 \leq p \leq \infty$ et $f, g \in L^p$. Alors $f + g \in L^p$ et*

$$\|f + g\|_{L^p} \leq \|f\|_{L^p} + \|g\|_{L^p}.$$

Corollaire 3.12. *Pour tout $1 \leq p \leq \infty$ l'espace L^p est un espace normé.*

L'inégalité d'interpolation qui suit dit que si une fonction appartient à deux espaces L^p, alors elle appartient à tous les espaces L^p intermédiaires.

Proposition 3.13 (interpolation)**.** *Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$ et $f \in L^p \cap L^q$. Alors $f \in L^r$ pour tout $r \in [p, q]$ et on a l'inégalité*

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}^{\alpha} \|f\|_{L^q}^{1-\alpha}$$

où $\alpha \in [0, 1]$ est déterminé par la relation $\frac{1}{r} = \frac{\alpha}{p} + \frac{1-\alpha}{q}$.

Rappelons que la convolution entre deux fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}^n$ est donnée par la formule suivante :

$$f * g(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) \, dy.$$

Pour que $f * g$ soit bien défini au point x il faut que la fonction $y \mapsto f(y)g(x - y)$ soit intégrable sur $\mathbb{R}^n$. Nous avons l'inégalité suivante pour la convolution.

Proposition 3.14 (inégalité de Young pour la convolution)**.** *Soient $p, q, r \in [1, \infty]$ tels que $1 + \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$. Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$ alors la convolution $f * g$ est définie pour presque tout x. Nous avons de plus que $f * g \in L^r(\mathbb{R}^n)$ et $\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.*

On termine avec une inégalité de Clarkson.

Proposition 3.15 (inégalité de Clarkson)**.** *Soit $2 \leq p < \infty$ et $f, g \in L^p$. Nous avons l'inégalité suivante :*

$$\left\|\frac{f + g}{2}\right\|_{L^p}^p + \left\|\frac{f - g}{2}\right\|_{L^p}^p \leq \frac{1}{2}(\|f\|_{L^p}^p + \|g\|_{L^p}^p).$$

3.3 Complétude

Dans cette très courte section nous montrons que les espaces L^p sont complets.

Théorème 3.16 (Fischer-Riesz). *Pour tout* $1 \leq p \leq \infty$ *l'espace* L^p *est un espace de Banach.*

Au cours de la preuve du théorème qui précède nous montrons aussi l'énoncé suivant qui peut être vu comme la réciproque du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Proposition 3.17. *Soit* $f_n \to f$ *dans* L^p. *Il existe une sous-suite* f_{n_k} *et une fonction* $g \in L^p$ *tels que* $f_{n_k} \to f$ *p.p. et* $|f_{n_k}| \leq g$.

3.4 Densité des fonctions régulières

Dans cette partie nous supposons que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et l'espace $L^p(\Omega)$ est défini par rapport à la mesure de Lebesgue. Rappelons la définition de l'espace des fonctions régulières à support compact :

$$C_c^\infty(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \ ; \ \mathrm{supp}(f) \text{ est un compact de } \Omega\}.$$

Nous avons aussi besoin d'introduire la notion de suite régularisante.

Définition 3.18. *Une suite régularisante, ou approximation de l'identité, est un ensemble de fonctions* $\varphi_\varepsilon \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ *de la forme*

$$\varphi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\Big(\frac{x}{\varepsilon}\Big)$$

où

$$\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n), \quad \varphi \geq 0, \quad \mathrm{supp}\,\varphi \subset B_f(0,1), \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Un exemple de fonction φ comme au-dessus est donné par

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{|x|^2-1}} & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1. \end{cases}$$

normalisée par une constante qui la rende d'intégrale 1.

L'approximation par convolution avec une suite régularisante et la densité des fonctions en escalier permettent de montrer le résultat suivant.

Théorème 3.19. *Si* $1 \leq p < \infty$ *l'espace* $C_c^\infty(\Omega)$ *est dense dans* $L^p(\Omega)$.

Remarque. Dans le cas de L^∞ le résultat de densité au-dessus est faux car une limite uniforme de fonctions continue est nécessairement continue. Mais la même construction que dans le théorème précédent nous montre la densité faible$*$ de $C_c^\infty(\Omega)$ dans $L^\infty(\Omega)$. Plus précisément, pour toute fonction $f \in L^\infty(\Omega)$ il existe une suite de fonctions $f_n \in C_c^\infty(\Omega)$ telle que

$$\int\limits_\Omega f_n g \to \int\limits_\Omega fg \quad \text{pour tout } g \in L^1(\Omega).$$

3.5 Dualité et réflexivité

Nous allons étudier dans cette partie les duaux des espaces L^p ainsi que leur réflexivité. Nous nous plaçons à nouveau dans le cadre d'un espace mesuré σ-fini.

Commençons par une proposition qui dit que $L^{p'}$ s'injecte dans le dual de L^p pour tout p.

Proposition 3.20. *Soient $1 \leq p, p' \leq \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Nous avons que $L^{p'} \hookrightarrow (L^p)'$. Plus précisément, pour tout $f \in L^{p'}$, l'application*

$$T_f : L^p \to \mathbb{K}, \qquad T_f(g) = \int fg$$

définit un élément de $(L^p)'$ et l'application $L^{p'} \ni f \mapsto T_f \in (L^p)'$ est une isométrie.

Continuons par une définition.

Définition 3.21. *Un espace de Banach est dit uniformément convexe si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que l'implication suivante soit vraie :*

$$\|x\| \leq 1, \ \|y\| \leq 1, \ \|x - y\| > \varepsilon \implies \|\frac{x+y}{2}\| < 1 - \delta.$$

Nous admettrons provisoirement deux résultats. Le premier dit qu'un espace de Banach uniformément convexe est réflexif. Le deuxième dit qu'un sous-espace fermé dans un espace réflexif est réflexif. Ces deux résultats ensemble avec l'inégalité de Clarkson permettent de montrer que les L^p avec $1 < p < \infty$ sont réflexifs.

Théorème 3.22. *L'espace L^p est réflexif pour tout $1 < p < \infty$.*

Quant à la dualité nous avons le résultat suivant.

Théorème 3.23. *Pour tout $1 \leq p < \infty$ le dual de L^p s'identifie à $L^{p'}$ où p' est l'indice dual de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Plus précisément, l'application T définie dans la proposition 3.20 est surjective.*

Pour le dual de L^∞ nous avons en général seulement une inclusion. En effet, dans le cas d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et de la mesure de Lebesgue le dual de L^∞ est strictement plus grand que L^1.

Proposition 3.24. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la mesure de Lebesgue. Le dual de $L^\infty(\Omega)$ est strictement plus grand que $L^1(\Omega)$.*

Pour compléter l'étude de la réflexivité des espaces L^p, remarquons que L^1 n'est en général pas réflexif. En effet, comme le dual de $L^1(\Omega)$ est $L^\infty(\Omega)$ nous avons que le bidual de $L^1(\Omega)$ est le dual de $L^\infty(\Omega)$ donc strictement plus grand que $L^1(\Omega)$. L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas réflexif non plus car c'est le dual de $L^1(\Omega)$ et on peut montrer que le dual d'un espace non-réflexif est non-réflexif.

3.6 Séparabilité

Nous allons maintenant nous intéresser à la séparabilité des espaces L^p. Celle-ci est très importante dans la mesure où c'est elle qui va nous permettre d'extraire des sous-suites (faiblement) convergentes des suites bornées grâce au théorème de Banach-Alaoglu.

Nous nous plaçons dans le cadre d'un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ avec la mesure de Lebesgue.

Théorème 3.25. *L'espace $L^p(\Omega)$ est séparable pour tout $1 \leq p < \infty$.*

Cela vient de la densité de $C_c^0(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ et de la séparabilité de $C_c^0(\Omega)$. Nous avons d'abord le résultat suivant.

Proposition 3.26. *Pour tout K compact l'espace $C^0(K)$ (muni de la norme L^∞) est séparable.*

Puis

Proposition 3.27. *L'espace $C_c^0(\Omega)$ (avec la norme L^∞) est séparable.*

Par contre, l'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.

Proposition 3.28. *Si Ω est un ouvert non-vide de $\mathbb{R}^n$, l'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est pas séparable.*

C'est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 3.29. *Un espace normé qui admet une famille non-dénombrable d'ouverts disjoints non-vides n'est pas séparable.*

Vu ce qui a été montré dans ce qui précède, le théorème de Banach-Alaoglu (théorème 1.56) implique immédiatement le résultat suivant.

Théorème 3.30. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec la mesure de Lebesgue et f_n une suite bornée dans $L^p(\Omega)$.*

a) Si $1 < p < \infty$ alors la suite f_n admet une sous-suite qui converge faiblement dans $L^p(\Omega)$.

b) Si $p = \infty$ alors la suite f_n admet une sous-suite qui converge faible$*$ dans $L^\infty(\Omega)$.

c) Si $p = 1$, la suite f_n ne possède pas forcément une sous-suite convergente faiblement dans $L^1(\Omega)$.

Concernant les suites bornées de L^1 la situation n'est clairement pas satisfaisante puisqu'on ne peut rien dire pour l'instant. C'est parce-qu'on n'a pas regardé L^1 de la bonne manière. Jusqu'ici on l'a vu comme un sous espace du dual de L^∞, mais comme L^∞ n'est pas séparable on ne peut rien dire sur les suites bornées de son dual. La bonne manière de procéder est en fait de regarder $L^1(\Omega)$ comme un sous-espace du dual de $C_c^0(\Omega)$ qui lui est séparable. On est donc naturellement amenés à étudier le dual de $C_c^0(\Omega)$ qui porte d'ailleurs un nom.

Définition 3.31. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Une mesure de Radon bornée est un élément du dual de $C_c^0(\Omega)$ (on munit $C_c^0(\Omega)$ de la norme L^∞).*

On les appelle des mesures de Radon car on peut les voir comme des mesures usuelles. Nous avons en effet le théorème suivant (admis).

Théorème 3.32 (Radon-Riesz). *Toute mesure de Radon bornée et positive u (c'est-à-dire que $u(f) \geq 0$ si $f \geq 0$) s'identifie à une mesure borelienne μ finie au sens que*

$$u(f) = \int_\Omega f \, d\mu \quad \text{pour tout } f \in C_c^0(\Omega).$$

Si u est réelle mais pas forcément positive alors u est la différence de deux mesures positives finies (on peut voir dans ce cas u comme une mesure qui n'est pas forcément positive). De même, si u est à valeurs complexe, ses parties réelles et imaginaires seront la différence de deux mesures positives finies.

Remarque. Lorsqu'on suppose u positive et linéaire sur $C_c^0(\Omega)$ mais pas forcément continue on a toujours l'existence de la mesure μ mais elle sera finie seulement sur les compacts.

La séparabilité de $C_c^0(\Omega)$ et le théorème de Banach-Alaoglu nous donnent le théorème suivant.

Théorème 3.33. *Soit Ω on ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec la mesure de Lebesgue et f_n une suite bornée dans $L^1(\Omega)$. Il existe une mesure de Radon bornée μ sur Ω et une sous-suite de f_n qui converge au sens des mesures de Radon vers μ :*

$$\int f_n g \to \int g \, d\mu \quad \textit{pour tout } g \in C_c^0(\Omega).$$

À titre d'exemple, on voit facilement qu'une suite régularisante converge au sens des mesures vers la masse de Dirac en 0.

En guise de conclusion : pour pouvoir extraire une suite convergente d'une suite bornée de L^1 il faut sortir de l'espace L^1. La convergence se fera dans l'espace des mesures de Radon. Par contre, pour les $p > 1$ il n'y a pas cette restriction.

4 Espaces de fonctions continues

Dans cette partie on se pose la question de la topologie des espaces de fonctions continues et de leurs propriétés.

4.1 Topologie

Pour les fonctions continues sur un compact, c'est très simple, elles sont nécessairement bornées et on utilise alors la norme $\|\cdot\|_\infty$ ce qui en fait un espace de Banach.

Définition 4.1. *Soit K un compact. On définit $C^0(K) = \{f : K \to \mathbb{C},\ f \text{ continue}\}$ et on le munit de $\|f\|_\infty = \sup_K |f| = \max_K |f|$.*

On a vu les années précédentes que c'est complet.

Proposition 4.2. *L'espace $C^0(K)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.*

On peut faire de même pour les fonctions continues et bornées sur un ouvert.

Définition 4.3. *Soit Ω un ouvert. On définit $C^0_b(\Omega) = \{f : \Omega \to \mathbb{C},\ f \text{ continue et bornée}\}$ et on le munit de $\|f\|_\infty = \sup_\Omega |f| = \max_\Omega |f|$.*

Comme au-dessus, $C^0_b(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$ est un espace de Banach.

Malheureusement, les fonctions continues sur un ouvert ne sont pas forcément bornées. Dès lors, quelle topologie mettre sur cet espace ? Il n'y a pas de norme qui puisse convenir. Il y a cependant une distance.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K_j une suite exhaustive de compacts : $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ et $\Omega = \bigcup_{j\in\mathbb{N}} K_j$. On introduit la semi-norme $p_j(f) = \sup_{K_j} |f|$. La distance sur $C^0(\Omega)$ est définie par

$$d(f,g) = \sum_{j\in\mathbb{N}} 2^{-j} \frac{p_j(f-g)}{1+p_j(f-g)}.$$

Cela en fait un espace métrique complet dont la convergence est la convergence uniforme sur les compacts. On appelle d'ailleurs cette distance la distance de la convergence uniforme sur les compacts.

Proposition 4.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et $C^0(\Omega)$ l'espace des fonctions continues de Ω dans $\mathbb{C}$. Alors*

a) L'application d définie au-dessus est une distance.

b) $C^0(\Omega)$ muni de la distance d est un espace métrique complet.

c) Nous avons que f_p tend vers f pour d si est seulement si f_p tend vers f uniformément sur les tous les compacts de Ω.

Nous pouvons aussi nous intéresser à d'autres espaces de fonctions régulières, comme par exemple $C^k(\Omega)$ et $C^\infty(\Omega)$. L'étude est entièrement similaire en utilisant la famille dénombrable de semi-normes suivante :

$$p_{\alpha,j}(f) = \sup_{K_j} |\partial^\alpha f|$$

où $\alpha \in \mathbb{N}^n$ est un multi-indice et $\partial^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$. Ici j varie dans $\mathbb{N}$, et dans le cas de $C^k(\Omega)$ il faut aussi imposer la condition $|\alpha| = |\alpha_1| + \dots + |\alpha_n| \le k$. Les espaces $C^k(\Omega)$ et $C^\infty(\Omega)$ deviennent alors des espaces métriques complets dont la convergence est la convergence uniforme sur tous les compacts de Ω de toutes les dérivées (d'ordre $\le k$ dans le cas de $C^k(\Omega)$).

4.2 Densité des polynômes

Le but de cette partie est de montrer que les polynômes sont denses dans $C^0(K)$. Nous avons besoin de deux résultats préliminaires. Le premier est un résultat d'extension de fonctions continues.

Théorème 4.5 (Tietze). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et K un compact de Ω. Toute fonction continue sur K s'étend à une fonction continue à support compact définie sur Ω.*

Le deuxième affirme la densité des polynômes dans le cas du cube $[0,1]^n$.

Théorème 4.6 (Bernstein). *Soit $f : [0,1]^n \to \mathbb{C}$ continue. On introduit le polynôme de Bernstein*

$$P_k(X) = \sum_{j_1=0}^{k} \dots \sum_{j_n=0}^{k} C_k^{j_1} \dots C_k^{j_n} f\big(\frac{j}{n}\big) x_1^{j_1}(1-x_1)^{k-j_1} \dots x_n^{j_n}(1-x_n)^{k-j_n}.$$

Alors P_k tend vers f uniformément sur $[0,1]^n$.

On en déduit via un changement de variables que les polynômes sont denses dans les fonctions continues sur un pavé. Comme tout compact est inclus dans un pavé, le théorème de Tietze nous permet de nous ramener au cas d'un pavé. Nous avons obtenu le théorème suivant.

Théorème 4.7 (Weierstrass). *Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$. Les polynômes sont denses dans $C^0(K)$.*

4.3 Compacité

Nous abordons enfin la question de la compacité dans les espaces de fonctions continues. D'abord une définition.

Définition 4.8. *Soient E, F deux espaces métriques, $f : E \to F$ et $\mathscr{F} \subset C^0(E,F)$.*

a) La fonction f est continue si pour tout x et $\varepsilon > 0$ il existe $\eta > 0$ tel qu'on ait l'implication

$$d(x,y) < \eta \Longrightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

b) La famille $\mathscr{F}$ est dite équicontinue si le η au-dessus ne dépend pas de $f \in \mathscr{F}$.

c) La famille $\mathscr{F}$ est dite uniformément équicontinue si le η au-dessus ne dépend pas de $f \in \mathscr{F}$ ni de x.

Si l'espace de départ est compact, alors l'équicontinuité équivaut à l'uniforme équicontinuité.

Proposition 4.9. *Soient E compact métrique et F métrique. Une famille $\mathscr{F} \subset C^0(E,F)$ est équicontinue si et seulement si elle est uniformément équicontinue.*

Voici maintenant le théorème d'Ascoli qui donne une condition nécessaire pour la compacité de l'espace des fonctions continues.

Théorème 4.10 (Ascoli). *Soit K un espace métrique compact et X un espace métrique. On se donne une famille $\mathscr{F}$ de fonctions continues de K dans X et on munit $C^0(K,X)$ de la distance de la convergence uniforme. La famille $\mathscr{F}$ est relativement compacte si et seulement si les deux conditions suivantes sont vérifiées :*

a) $\mathscr{F}$ est ponctuellement relativement compacte : pour tout $x \in K$ l'ensemble $\mathscr{F}(x) = \{f(x)\ ;\ f \in \mathscr{F}\}$ est relativement compact.

b) $\mathscr{F}$ est équicontinue, c'est-à-dire les fonctions de $\mathscr{F}$ sont uniformément continues avec les mêmes constantes : pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $d(x,y) < \delta$ alors $d(f(x), f(y)) < \varepsilon$ pour tout $f \in \mathscr{F}$.

Remarque. Souvent on travaille avec des fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. Dans ce cas la condition de ponctuellement relativement compact est automatiquement vérifiée. La condition principale est donc l'équicontinuité.

5 Deux dettes

Pour conclure ce cours, il nous reste à solder deux dettes contractées quand on a étudié le dual de L^p. La première dette est la suivante.

Proposition 5.1. *Tout sous-espace vectoriel fermé dans un espace réflexif est réflexif.*

Définissons maintenant la topologie faible$*$.

Définition 5.2. *Soit E un espace normé. La topologie faible$*$ sur E' est la topologie la moins fine qui rend toutes les évaluations $E' \ni f \mapsto f(x)$ continues.*

Une base de voisinages pour un éléments f_0 est donnée par

$$\bigcap_{i \in I \text{ fini}} \{f \in E' \ ; \ |(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon\}.$$

où les x_i sont des éléments arbitraires de E.

On désigne par B_E la boule unité fermée de E.

Voici maintenant notre deuxième dette.

Théorème 5.3 (Milman-Pettis)**.** *Un espace de Banach uniformément convexe est réflexif.*

Pour montrer ce lemme nous avons besoin de deux lemmes.

Lemme 5.4 (Helly)**.** *Soit E un espace de Banach, $f_1, \dots, f_n \in E'$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. Nous avons l'équivalence entre les affirmations suivantes :*

a) Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in B_E$ tel que $|f_i(x) - \alpha_i| < \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

b) Nous avons que $|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i| \leq \|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\|$ pour tout $\beta_i \in \mathbb{R}$.

Lemme 5.5 (Goldstine)**.** *Soit E un espace de Banach. Nous avons que $T(B_E)$ est dense dans $B_{E''}$ pour la topologie faible$*$.*