Feuille d'exercices n° 1 : "Révisions"

Exercice 0. Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ et $(Y, \|Y\|_Y)$ deux espaces vectoriels normés et $f\colon X \to Y$ une application linéaire. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue.
2. f est continue en 0.
3. Il existe $M \in \mathbf{R}$ tel que pour tout $x \in X$ on ait $\|f(x)\|_Y \leqslant M\|x\|_X$.
4. f est lipschitzienne.

Dans la suite, on utilise la notation $\|f\|$ pour la norme subordonée de f.

Exercice 1. Donner un exemple d'un espace de Banach X et d'une application linéaire continue $T : X \to X$ qui est injective et non surjective. Même question avec T surjective et non injective.

Exercice 2. On note $\mathcal{L}(X, Y)$ l'espace vectoriel des applications linéaires continues de X dans Y.

1. Dans cette question et la suivante, on suppose que X est un espace de Banach. Montrer que l'ensemble $\mathrm{Gl}(X)$ des applications linéaires continues inversibles est ouvert dans $\mathcal{L}(X, X)$ (on pourra commencer par justifier que $Id - T$ est inversible dès lors que $\|T\| < 1$) et que $A \mapsto A^{-1}$ est continue sur $\mathrm{Gl}(X)$.
2. Montrer que pour $A, B \in \mathrm{Gl}(X)$ on a $A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}$, puis que $A \mapsto A^{-1}$ est différentiable sur $\mathrm{Gl}(X)$ (on donnera une formule explicite pour la différentielle).
3. Dans cette question, on considère l'espace $E = \mathbf{R}[X]$, muni de la norme
$$\left\| \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \right\| = \max\{|a_k| : 0 \leqslant k \leqslant n\}$$
Pour $\lambda \in \mathbf{R}$ et $P \in E$ on définit $T_\lambda(P)(X) = \lambda X P(X)$. Montrer que T_λ est continue, et que $Id - T_\lambda$ tend vers Id (pour la norme subordonnée) quand λ tend vers 0. L'ensemble $\mathrm{Gl}(E)$ est-il ouvert dans $\mathcal{L}(E, E)$?
4. Si X est de dimension finie, montrer que $\mathrm{Gl}(X)$ est dense dans $\mathcal{L}(X, X)$.
5. Dans cette question on fixe $X = \ell^1(\mathbf{N})$ et on définit $S, T\colon X \to X$ par
$$\forall n \in \mathbf{N} \quad S(u)(n) = u(n+1) \text{ et } T(u)(n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ u(n-1) & \text{si } n \geqslant 1 \end{cases}.$$
   (a) Déterminer les normes de ces applications linéaires ; calculer ST.
   (b) Supposons qu'il existe $V \in \mathrm{Gl}(X)$ telle que $\|T - V\| < 1$. Montrer que $\|\mathrm{Id} - SV\| < 1$ et en déduire que S est bijective.
   (c) Conclusion ?

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}^\infty([0,1], \mathbf{R})$ muni d'une norme quelconque, et $T\colon E \to E$ définie par $T(f) = f'$. Montrer que T n'est pas continue.

Exercice 4. Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$. On fixe $g \in E$ et on pose $T_g(f) = fg$.

1. L'application $T_g\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_1)$ est-elle continue ? Si oui, déterminer sa norme subordonnée.
2. Même question pour $T_g\colon (E, \|\cdot\|_2) \to (E, \|\cdot\|_1)$.
3. Même question pour $T_g\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_2)$.
4. Même question pour $T_g\colon (E, \|\cdot\|_1) \to (E, \|\cdot\|_\infty)$.
5. Même question pour $T_g\colon (E, \|\cdot\|_\infty) \to (E, \|\cdot\|_1)$.

Exercice 5. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé, et φ une forme linéaire.

1. Montrer que si φ est continue alors $\ker(\varphi)$ est fermé.
   On souhaite maintenant établir la réciproque de cet énoncé ; on suppose que φ n'est pas continue.
2. Montrer qu'il existe une suite $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ d'éléments de E tels que $e_n \to 0$ et $\varphi(e_n) = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.
3. Soit $x \in E$. En considérant la suite $(x - \varphi(x)e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, montrer que $\ker(\varphi)$ est dense dans E.

Exercice 6. *Étude de la séparabilité des espaces $\ell^p(\mathbf{N})$*

1. Soit $p \in [1, +\infty[$.
   (a) Montrer que l'ensemble des suites réelles nulles à partir d'un certain rang est dense dans $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$.
   (b) En déduire que $(\ell^p(\mathbf{N}), \|\cdot\|_p)$ est séparable.
2. Montrer que $(\ell^\infty(\mathbf{N}), \|\cdot\|_\infty)$ n'est pas séparable. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde et utiliser un argument diagonal.*

Exercice 7. Dans cet exercice on fixe $p \in \,]1, +\infty[$. On rappelle que l'*exposant conjugué* de p est l'unique $q \in \,]1, +\infty[$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Notons qu'alors $p(q-1) = q$ et $q(p-1) = p$.
Pour $u \in \ell^p(\mathbf{N})$ on définit $T_u \colon \ell^q(\mathbf{N}) \to \mathbf{C}$ en posant

$$T_u(v) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$$

1. Montrer que T_u est bien définie, continue et que $\|T_u\| \leqslant \|u\|_p$.
2. Soit $\varphi \in \ell_q(\mathbf{N})'$. Pour tout $n \in \mathbf{N}$ on pose $u_n = \varphi(e_n)$, où $(e_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \ell^q(\mathbf{N})$ est telle que $e_n(i) = 1$ si $n = i$ et $e_n(i) = 0$ si $n \neq i$.
   (a) Pour $n \in \mathbf{N}$ on choisit λ_n tel que $|\lambda_n| = 1$ et $\lambda_n u_n = |u_n|$. On pose $\mu_n = \lambda_n |u_n|^{p-1}$. Montrer que

$$\forall N \in \mathbf{N} \quad \varphi\left(\sum_{n=0}^{N} \mu_n e_n\right) = \sum_{n=0}^{N} |u_n|^p$$

   (b) Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ appartient à $\ell^p(\mathbf{N})$ et $\|u\|_p \leqslant \|\varphi\|$.
   (c) Montrer que $T_u = \varphi$ (on pourra essayer d'exploiter le fait que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $T_u(e_n) = u_n = \varphi(e_n)$).
3. Quel lien vient-on d'établir entre $\ell^q(\mathbf{N})'$ et $\ell^p(\mathbf{N})$? Énoncer et démontrer un résultat analogue sur le dual topologique de $\ell^1(\mathbf{N})$.

Exercice 8. *Théorème de Mazur–Ulam*
On souhaite démontrer le résultat suivant : soit X un $\mathbf{R}$-espace vectoriel normé $f \colon X \to X$ une isométrie bijective telle que $f(0) = 0$. Alors f est linéaire.
On suppose que f satisfait les conditions ci-dessus.

1. Montrer que, pour obtenir le résultat, il suffit d'établir que

$$\forall x, y \in X \quad f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

2. On fixe maintenant $x, y \in E$, et on note

$$M = \left\{ z \in X \colon \|z - x\| = \|z - y\| = \frac{\|x - y\|}{2} \right\}$$

   (a) Montrer que M est borné.
   On définit par récurrence $M_0 = M$ et $M_{n+1} = \left\{ a \in M_n \colon \forall b \in M_n \ \|a - b\| \leqslant \frac{\operatorname{diam}(M_n)}{2} \right\}$.

(b) Montrer que $(M_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite décroissante de fermés, et que $\mathrm{diam}(M_{n+1}) \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{diam}(M_n)$ pour tout n.

(c) Soit $n \in \mathbf{N}$. Montrer que si $a \in M_n$ alors $x + y - a \in M_n$.

(d) Prouver que $\frac{x+y}{2} \in M_n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

3. Conclure.
4. Quid du cas des espaces vectoriels sur $\mathbf{C}$?
5. Donner un exemple de $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}^2$ telle que $f(0) = 0$, $\|f(x)\|_\infty = |x|$ pour tout $x \in \mathbf{R}$ mais f n'est pas linéaire.

Exercice 9. *Un Banach de dimension infinie ne peut avoir de base (algébrique) dénombrable.*
On suppose que X est un espace de Banach qui n'est pas de dimension finie, c'est-à-dire qu'il existe une suite (u_n) d'éléments de X telle que $\{u_n \colon n \in \mathbf{N}\}$ soit une famille libre.

1. Montrer que, pour tout n, $F_n = \mathrm{Vect}(u_0, \dots, u_n)$ est fermé dans X.
2. Construire une suite de réels strictement positifs $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ tels que

$$\forall n \in \mathbf{N}^* \quad \alpha_{n+1}\|u_{n+1}\| \leqslant \frac{1}{3}d(\alpha_n u_n, F_{n-1}) \,.$$

3. Montrer que $x = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha_k u_k$ est bien défini, et que pour tout $n \in \mathbf{N}$ on a $x \notin F_n$.
4. Conclure.

Exercice 10. *Théorème de Banach–Steinhaus.*
Soit X, Y deux espaces vectoriels normés ; on suppose que X est un espace de Banach. On souhaite démontrer le résultat suivant : soit $(T_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de X vers Y, telle que pour tout $x \in X$, la suite $(T_n(x))_{n\in\mathbf{N}}$ soit bornée dans Y. Alors la suite des normes $(\|T_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ est bornée.
On se place sous les hypothèses du théorème.

1. *Préliminaire.* Soit $T \colon X \to Y$ une application linéaire continue.

   (a) Soit $x, u \in X$. Montrer que $\|T(u)\| \leqslant \max(\|T(u+x)\|, \|T(u-x)\|)$.

   (b) En déduire que pour tout $x \in X$ et tout $r > 0$ on a

$$r \cdot \|T\| \leqslant \sup\{\|T(y)\| \colon y \in B(x,r)\}.$$

2. *Preuve du théorème.* On raisonne par l'absurde et on suppose que $(\|T_n\|)_{n\in\mathbf{N}}$ n'est pas bornée.

   (a) Montrer qu'il existe $\varphi \colon \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ strictement croissante et telle que $\|T_{\varphi(n)}\| \geqslant 4^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Pour simplifier la notation dans la suite, on suppose $\|T_n\| \geqslant 4^n$ pour tout $n \in \mathbf{N}$.

   (b) À l'aide du résultat de (1b), montrer qu'on peut construire une suite $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ telle que $x_0 = 0$ et

$$\forall n \geqslant 1 \quad \|x_n - x_{n-1}\| \leqslant 3^{-n} \text{ et } \|T_n(x_n)\| \geqslant \frac{2}{3}3^{-n}\|T_n\| \,.$$

   (c) Prouver qu'il existe $x \in X$ tel que $\|T_n(x)\|$ tend vers $+\infty$.

   (d) Conclure.

3. La conclusion du théorème de Banach–Steinhaus reste-t-elle valide si on ne suppose pas que X est complet ?

Les résultats des deux exercices précédents sont le plus souvent démontrés à l'aide du théorème de Baire.