Licence de Mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse
Année 2017-2018

Fiche TD 1

Exercice 1. Définition. Deux normes N_1 et N_2 sont dites équivalentes s'il existe deux constantes $C_1, C_2 > 0$ telles que $N_2 \leq C_1 N_1$ et $N_1 \leq C_2 N_2$. Montrer que si N_1 et N_2 sont équivalentes alors les ouverts associés sont les mêmes et les notions de convergence, limite et continuité ne changent pas.

Exercice 2. On définit une application sur $M_n(\mathbb{R})$ par

$$\|A\| = n \max_{1, \leq i,j \leq n} |a_{ij}|.$$

Montrer que c'est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme multiplicative :

$$\|AB\| \leq \|A\| \, \|B\| \quad \forall A, B \in M_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 3. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x,y) = \max(\sqrt{x^2+y^2}, |x-y|)$ et $N_2(x,y) = \sqrt{x^2/9 + y^2/4}$.

a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unité fermées associées à ces normes.

b) Montrer que $N_2 \leq \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq N_1 \leq \|\cdot\|_1 \leq 4N_2$.

c) Déterminer la plus petite constante C telle que $\|\cdot\|_1 \leq CN_2$. (Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Exercice 4. L'application $N(x,y) = |5x+3y|$ est-elle une norme de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 5. Démontrer que dans tout espace normé on a si $x \neq 0$ et $y \neq 0$

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2 \frac{\|x-y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 6. Montrer que l'application

$$N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \to N(x,y) = \sup_{t \in [0,1]} |x+ty|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessiner la sphère unité.

Exercice 7. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ établir les inégalités $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ et $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$. Montrer que les constantes de ces inégalités ne peuvent pas être améliorées.

Exercice 8. Pour une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ on définit

$$N(A) = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que

$$\|Ax\|_2 \leq N(A)\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 9. Pour quelles valeurs du réel λ définit-on une norme sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N_\lambda(x,y) = \sqrt{x^2 + 2\lambda xy + y^2}?$$

Comparer les deux normes N_λ et N_μ.

Exercice 10. Soit A une partie non vide d'un espace normé E et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction k-Lipschitzienne. Montrer que la fonction

$$g : E \to \mathbb{R}, \; x \to g(x) = \sup_{t \in A} \{f(t) - k\|x-t\|\}$$

est bien définie. Vérifier que g prolonge f et que g est aussi k-Lipschitzienne.

Exercice 11. Soit F l'ensemble des fonctions Lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application

$$f \to N(f) = |f(0)| + \sup_{0\le x\le y\le 1} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}.$$

Montrer que c'est une norme et comparer avec $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 12. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2}.$$

Déterminer et dessiner la sphère unité.

Exercice 13. Dans l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on considère une famille $(f_1,\dots,f_p)\in E^p$ et on définit l'application $N:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$ par

$$N(x_1,\dots,x_p) = \|\sum_{i=1}^p x_i f_i\|_{L^\infty}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Exercice 14.

a) Sur $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ montrer que la quantité

$$N(f) = \sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2 + |f'(t)|^2\ dt}$$

est une norme.

b) Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que : $\|f\|_\infty \le CN(f), \forall f\in\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$. Les deux normes N et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

c) Montrer que $F_0 = \left\{f\in\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}),\ f(0)=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ pour la norme N et que la quantité $N'(f) = \sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2\ dt}$ est une norme sur F_0 équivalente à N.

Exercice 15. Soit $E = C^1([0,1];\mathbb{R})$.

a) Montrer que les expressions suivantes définissent des normes sur E :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f|, \qquad \|f\|_\infty = \sup|f|, \qquad \|f\|_3 = |f(0)| + \sup|f'|.$$

b) Montrer que $\|f\|_1 \le \|f\|_\infty \le \|f\|_3$.

c) Montrer que l'application identité est continue de $(E,\|\cdot\|_3)$ à valeurs dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$.

d) Soit $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$. Étudier la convergence de f_n dans $(E,\|\cdot\|_3)$ et dans $(E,\|\cdot\|_\infty)$. L'application identité est-elle continue de $(E,\|\cdot\|_\infty)$ à valeurs dans $(E,\|\cdot\|_3)$?

e) Soit $g_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}$ où $\alpha\in\mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite g_n pour les trois normes définies dans la première question (discuter suivant α).

Exercice 16. Sur l'espace des suites réelles sommables nous définissons

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^\infty |x_n| \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

Montrer qu'il s'agit de deux normes et déterminer si elles sont équivalentes. (On pourra considérer la suite géométrique $(1,a,a^2,a^3,\dots)$.)