Licence de Mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse
Année 2019-2020

Fiche TD 1

Exercice 1. On définit une application sur $M_n(\mathbb{R})$ par

$$\|A\| = n \max_{1,\leq i,j\leq n} |a_{ij}|.$$

Montrer que c'est une norme sur $M_n(\mathbb{R})$, puis qu'il s'agit d'une norme multiplicative :

$$\|AB\| \leq \|A\|\,\|B\| \quad \forall A,B \in M_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 2. Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $N_1(x,y) = \max(\sqrt{x^2+y^2}, |x-y|)$ et $N_2(x,y) = \sqrt{x^2/9+y^2/4}$.

a) Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}^2$ et représenter les boules unité fermées associées à ces normes.
b) Montrer que $N_2 \leq \|\cdot\|_\infty \leq \|\cdot\|_2 \leq N_1 \leq \|\cdot\|_1 \leq 4N_2$.
c) Déterminer la plus petite constante C telle que $\|\cdot\|_1 \leq CN_2$. (Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.)

Exercice 3. L'application $N(x,y) = |5x+3y|$ est-elle une norme de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 4. Démontrer que dans tout espace normé on a si $x \neq 0$ et $y \neq 0$

$$\left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| \leq 2\frac{\|x-y\|}{\|x\|}.$$

Exercice 5. Montrer que l'application

$$N : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x,y) \to N(x,y) = \sup_{t\in[0,1]} |x+ty|$$

est une norme sur $\mathbb{R}^2$. Dessiner la sphère unité.

Exercice 6. Pour $x \in \mathbb{R}^n$ établir les inégalités $\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\|x\|_\infty$ et $\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\|x\|_2$. Montrer que les constantes de ces inégalités ne peuvent pas être améliorées.

Exercice 7. Pour une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ on définit

$$N(A) = \Big(\sum_{i,j} a_{ij}^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Montrer que

$$\|Ax\|_2 \leq N(A)\|x\|_2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Exercice 8. Pour quelles valeurs du réel λ définit-on une norme sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N_\lambda(x,y) = \sqrt{x^2+2\lambda xy+y^2}?$$

Comparer les deux normes N_λ et N_μ.

Exercice 9. Soit A une partie non vide d'un espace normé E et $f : A \to \mathbb{R}$ une fonction k-Lipschitzienne. Montrer que la fonction

$$g : E \to \mathbb{R},\ x \to g(x) = \sup_{t\in A}\{f(t) - k\|x-t\|\}$$

est bien définie. Vérifier que g prolonge f et que g est aussi k-Lipschitzienne.

Exercice 10. Soit F l'ensemble des fonctions Lipschitzienne de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$. On définit l'application

$$f \to N(f) = |f(0)| + \sup_{0\leq x\leq y\leq 1} \frac{|f(y)-f(x)|}{|y-x|}.$$

Montrer que c'est une norme et comparer avec $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 11. Montrer que l'on définit une norme sur $\mathbb{R}^2$ par

$$N(x,y) = \sup_{t\in\mathbb{R}} \frac{|x+ty|}{1+t^2}.$$

Déterminer et dessiner la sphère unité.

Exercice 12. Dans l'espace des fonctions continues définies sur $[0,1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, on considère une famille $(f_1,\dots,f_p) \in E^p$ et on définit l'application $N : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ par

$$N(x_1,\dots,x_p) = \|\sum_{i=1}^{p} x_i f_i\|_{L^\infty}.$$

Donner une condition nécessaire et suffisante pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^p$.

Exercice 13. Sur l'espace des suites réelles sommables nous définissons

$$\|x\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} |x_n| \qquad \text{et} \qquad \|x\|_\infty = \sup_n |x_n|.$$

Montrer qu'il s'agit de deux normes et les comparer. (On pourra considérer la suite géométrique $(1,a,a^2,a^3,\dots)$.)