
Feuille d'exercices n° 1: Fonctions différentiables, différentielles

Exercice 1. (★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x^2 - x + 2$. Soient $a, h \in \mathbb{R}$. Développer $f(a + h)$ et montrer que f est différentiable en a .

Exercice 2. (★) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une application et soit $a \in \mathbb{R}$.

1. On suppose que f est dérivable en a . Montrer que f est différentiable en a et donner la différentielle de f en a en fonction de $f'(a)$.
2. Réciproquement, on suppose f différentiable en a . Montrer que f est dérivable en a et donner $f'(a)$ en fonction de $Df(a)$.

Exercice 3. (★) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On rappelle qu'on a les implications suivantes : $(A) \Rightarrow (B) \Rightarrow (C)$ où

- (A) Les dérivées partielles de f existent et sont continues au voisinage de a .
- (B) f est différentiable en a .
- (C) Les dérivées partielles de f existent en a .

À l'aide des fonctions suivantes, montrer que les réciproques sont fausses en général.

$$f : (x, y) \mapsto \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } xy \neq 0 \\ x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } y = 0 \text{ et } x \neq 0 \\ y^2 \sin\left(\frac{1}{y}\right) & \text{si } x = 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

et

$$g : (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Exercice 4. (★) Calculer la différentielle des applications $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$.

Exercice 5. (★) On rappelle que la norme L^p d'un vecteur X dans \mathbb{R}^n s'écrit $\|X\|_p = (X_1^p + \dots + X_n^p)^{\frac{1}{p}}$. L'application $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_p$ est-elle différentiable en 0? Même question pour $X \in \mathbb{R}^n \mapsto \|X\|_p^p$? Calculer la différentielle quand elle existe.

Exercice 6. (★) Soit f une fonction C^1 de \mathbb{R} vers \mathbb{R} . Calculer la différentielle des fonctions $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x + y)$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x - y)$.

Exercice 7. (★)

1. Soient $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions de classe C^1 et soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(t) = x(t)^2 + y(t)^3$. Déterminer $h'(t)$ en fonction de $x'(t)$ et $y'(t)$.
2. Cas général : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont de classe C^1 et on définit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par $h(t) = f(x(t), y(t))$. Déterminer $h'(t)$ en fonction de $x'(t)$, $y'(t)$ et des dérivées partielles de f .

Exercice 8. (★) Soient U un ouvert de \mathbb{R}^2 , $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable, $a \in U, v \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de $t \mapsto f(a + tv)$ en $t = 0$ en fonction de la différentielle de f en a . Application : $f(x, y) = \exp(x^2 - y^3), a = (0, 1), v = (2, 0)$.

Exercice 9. (★) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(0, y) = 0$ et $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que f admet une dérivée au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur de \mathbb{R}^2 alors que f n'est pas continue en ce point.

Exercice 10. Calculer les dérivés partielles en tout point de \mathbb{R}^2 de la fonction suivante : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \min(x, y^2)$.

Exercice 11. (★) Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application différentiable sur \mathbb{R}^2 . On définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ par

$$g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy) \quad h(x, y, z) = f(2x - yz, xy - 3z).$$

Déterminer les dérivées partielles de g et h en fonction de celles de f et écrire les matrices jacobiniennes de g et h en un point quelconque.

Exercice 12. (★) Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(x, y) = \varphi(\frac{y}{x})$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Exercice 13. (★) Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients u, v, w pour que la droite d'équation $ux + vy + w = 0$ soit tangente à la parabole d'équation $y^2 - 2px = 0$ (où p est une constante non nulle).