TD10

1 Du calculatoire.

Exercice 1 (π est une période.)**.** En utilisant la formule des résidus et en choisissant soigneusement le contour montrer que :

$$(a) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi, \quad (b) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}, \quad (c) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^n} = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)},$$

$$(d) \int_0^{\infty} \frac{x^a}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\cos(\pi a/2)}.$$

Exercice 2 (Une identitée due à Hardy.)**.** Montrer que $\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 (Fonction Gamma toute puissante.)**.** Soit $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-t} t^{s-1} dt$.

Montrer que Γ est holomorphe sur le demi plan $Re(s) > 0$.

Montrer que Γ est solution de l'équation fonctionnelle

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

En déduire que Γ se prolonge méromorphiquement à $\mathbb{C}$ avec des pôles simples aux entiers négatifs, déterminer ces pôles.

Exercice 4 (Volume des sphères et fonction Γ.)**.** En évaluant de deux façons $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} d^n x$ montrer que le volume de la sphère unité $\mathbb{S}^{n-1}$ dans $\mathbb{R}^n$ vaut

$$\frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})}.$$

Exercice 5 (Fonction B d'Euler.)**.** On définit l'intégrale Eulérienne de première espèce comme

$$B(p,q) = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{p-1}.$$

En faisant un changement de variables dans l'intégrale $\int\int_{x,y \geqslant 0} e^{-x-y} x^{p-1} y^{q-1} dxdy$, montrer que

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Exercice 6 (Calcul de $\Gamma(\frac{1}{2})$.)**.** Montrer que $\Gamma(\frac{1}{2})^2 = \int_0^1 t^{-\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt$. En déduire $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$. Faire aussi un calcul direct en utilisant la relation $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$.

Exercice 7 (Identitée de Jacobi.)**.** Montrer l'identitée suivante :

$$\int_{0\leqslant t_1\leqslant\cdots\leqslant t_{n-1}\leqslant 1} t_1^{s_1}\dots(1-\sum_{e=1}^{n-1} t_e)^{s_n}dt_1\dots dt_{n-1} = \frac{\Gamma(s_1+\cdots+s_n)}{\Gamma(s_1)\dots\Gamma(s_n)}.$$

Exercice 8 (Intégrales Eulériennes.)**.** Evaluer $\int_0^\infty z^{s+1}\frac{dz}{z+1}$ par la méthode des résidus. Montrer la relation $\int_0^\infty z^{s+1}\frac{dz}{z+1} = \int_0^1 t^{s-1}(1-t)^{-s}$. En utilisant la formule de Cauchy pour le contour :

$$\{r\leqslant z\leqslant R\}\cup\{z=Re^{i\theta};\theta\in[0,2\pi]\}\cup\{R\leqslant z\leqslant r\}\cup\{z=re^{i\theta};\theta\in[0,2\pi]\}$$

en déduire la fameuse formule due à Euler

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin(\pi s)}. \tag{1}$$

Exercice 9 (Poincaré Lelong)**.** On note $\Delta = 4\partial_z\partial_{\overline{z}}$ le Laplacien usuel agissant sur les fonctions sur le plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que pour tout φ

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{2\pi}\log(|z|)(\Delta\varphi)dxdy = \varphi(0).$$

En déduire que

$$\int_{\mathbb{C}} \frac{1}{\pi z}\overline{\partial}\varphi(z)dxdy = \varphi(0).$$

2 Du théorique.

Exercice 10 (Une fonction holo a au moins 1 singularité sur son cercle de convergence)**.** Soit f holomorphe sur la boule fermée $B(0,R)$ de rayon R alors montrer que la série entière de f a un rayon de convergence $> R$.
En déduire qu'une fonction de rayon de convergence 1 admet une singularité sur le cercle de rayon 1.

Exercice 11 (Propriété de Montel et compacité)**.** Soit f_n une suite de fonctions holomorphes bornées sur U.
Montrer que si $f_n \to f$ uniformément sur U alors f est holomorphe.
Montrer que dans tous les cas on peut extraire une sous suite convergente qui converge vers f holomorphe.

Exercice 12 (Théorème Rouché)**.** Soit (f,g) holomorphes dans Ω et $U\subset\Omega$. Montrer que si $f > g$ sur ∂U alors f et $f+g$ ont le meme nombre de zéros dans U.

Exercice 13 (Holomorphie faible)**.** Soit T une fonction bornée et intégrable telle que quel que soit $\varphi\in C_c^\infty(U)$

$$\int_U T\overline{\partial}\varphi = 0.$$

Montrer que T est en fait holomorphe.

Exercice 14 (Singularités effaçables de Riemann)**.** Soit f holomorphe sur le disque épointé $\mathbb{D}\setminus\{0\}$ tel que f est bornée au voisinage de 0. Montrer que f se prolonge en fonction holomorphe $\overline{f}$ sur $\mathbb{D}$.
En déduire que si z_0 est une singularité essentielle de f holomorphe alors il existe $z_n\to z_0$ telle que $f(z_n)$ est partout dense dans $\mathbb{C}$.