Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 2017-2018
UE de calcul différentiel et analyse complexe

Feuille d'exercices n°10

Exercice 1. En utilisant la formule des résidus et en choisissant soigneusement le contour, montrer que :

$$(a)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi,\quad (b)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^4}=\frac{\pi}{\sqrt{2}},\quad (c)\int_{0}^{+\infty}\frac{dx}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin(\frac{\pi}{n})}.$$

Exercice 2. En passant par une intégration dans le domaine complexe, montrer que : $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx=\frac{\pi}{2}$.

Exercice 3. Soit f une fonction holomorphe sur le disque fermé $\overline{D}(0,R)$ avec $R>0$. Montrer que la série entière de f a un rayon de convergence $>R$. En déduire qu'une fonction holomorphe dont la série entière a un rayon de convergence 1 admet une singularité sur le cercle unité.

Exercice 4. Soient f,g holomorphes sur une domaine Ω. Soit γ un lacet simple orienté dans le sens direct et U l'intérieur de γ. On suppose que $|f|>|g|$ sur γ. Montrer que f et $f+g$ ont le même nombre de zéros dans U.

Exercice 5. Soient $a\in\mathbb{C}$ tel que $|a|\geq 1$ et $n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$. Montrer que l'équation $1+z+az^n=0$ a toutes ses racines dans le disque ouvert $D(0,2)$.

Exercice 6. Étant donnés deux entiers $n>m>1$, montrer que les zéros du polynôme $1+3z^m+5z^n$ sont situés dans la couronne $\{z\in\mathbb{C}\ ,\ 1/3<|z|<1\}$.
Indication : On utilisera les fonctions f et g données par $f(z)=1+3z^m$, $g(z)=5z^n$.

Exercice 7.
1. En considérant l'application $\Gamma : z\mapsto \dfrac{2}{\pi}\arctan(|z|)\dfrac{z}{|z|}$, montrer que $\mathbb{C}$ est homéomorphe au disque unité (ouvert) D.
2. Montrer cependant que $\mathbb{C}$ n'est pas biholomorphe à D. On pensera au théorème de Liouville.

Exercice 8. On note D le disque unité ouvert et S le cercle unité.
Étant donné $a\in D$, on considère l'application $\varphi_a : z\mapsto\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$.
Montrer que :
1. φ_a est holomorphe sur D.
2. $\varphi(S)\subset S$ puis que $\varphi(D)\subset D$.
3. φ_a est un biholomorphisme de D sur D d'inverse φ_{-a}.

Exercice 9. On note toujours D le disque unité ouvert.
Appliquer le lemme de Schwarz (exercice 1, fiche 9) et montrer que tout biholomorphisme ψ de D sur D est de la forme $\psi=e^{i\theta}\varphi_a$ avec $\theta\in\mathbb{R}$ et $a\in D$.
Indication : si ψ est un biholomorphisme de D sur D, on considère $a=\psi^{-1}(0)$ et $f=\psi\circ\varphi_{-a}$.