
Fiche d'exercices n$^{\text{o}}$ 10: Homographies, principe du maximum, théorème de Liouville

---

Exercice 1 (Équations de droites et de cercles dans $\mathbb{C}$)**.** Dans la suite on identifie le plan affine $\mathbb{R}^2$ muni du repère $\Big(0,(1,0),(0,1)\Big)$ avec $\mathbb{C}$ via l'identification $(x,y)\mapsto x+iy$.

1. Soient $\overrightarrow{u},\overrightarrow{w}$ deux vecteurs d'affixes u,w. Montrer que :
   (a) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont colinéaires si et s. si $u\overline{w}-\overline{u}w=0$.
   (b) $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ sont orthogonaux si et s. si $u\overline{w}+\overline{u}w=0$.
2. Donner une équation de la forme $\overline{a}z+a\overline{z}=b$ pour une droite D passant par un point d'affixe z_0 et orthogonale à un vecteur d'affixe $u\neq 0$. On exprimera a et b en fonction de u et z_0.
3. Réciproquement, soient $a\in\mathbb{C}\setminus\{0\}$ et $b\in\mathbb{R}$. Justifier que l'équation $\overline{a}z+a\overline{z}=b$ définit une droite.
4. Justifier que $b=0$ si et s. si la droite passe par 0.
5. On considère le cercle de centre d'affixe c et de rayon $R>0$. Donner une équation de ce cercle. (*Indication : elle est du type de la question suivante.*)
6. Soient $a\in\mathbb{C},b\in\mathbb{R}$. Montrer que si $|a|^2-b>0$ alors
$$z\overline{z}+\overline{a}z+a\overline{z}+b=0$$
   est l'équation d'un cercle dont on précisera le centre et le rayon en fonction de a et b.
   Que se passe-t-il si $|a|^2-b\leq 0$? Que peut-on dire si $b=0$?

Exercice 2 (Homographie dans $\widehat{\mathbb{C}}$)**.** On considère l'ensemble $\widehat{\mathbb{C}}$ obtenu en ajoutant à $\mathbb{C}$ un élément, noté par convention ∞. Ainsi, $\widehat{\mathbb{C}}=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$.
Soient $(a,b,c,d)\in\mathbb{C}^4$ tel que $ad-bc\neq 0$. Une homographie de $\widehat{\mathbb{C}}$ est une application

$$\begin{array}{rccl} h: & \widehat{\mathbb{C}} & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{C}} \\ & z & \mapsto & \left\{\begin{array}{cl} a/c & \text{si } z=\infty;\ h(\infty)=\infty \text{ si } c=0, \\ \infty & \text{si } z=-d/c, \\ \frac{az+b}{cz+d} & \text{sinon.}\end{array}\right.\end{array}$$

1. Montrer que si $ad-bc=0$ alors l'application précédente est constante et que si $ad-bc\neq 0$ alors elle est bijective et son application inverse est l'homographie $z\mapsto -\frac{dy-b}{cy-a}$

Par convention, *une droite de* $\widehat{\mathbb{C}}$ est une droite de $\mathbb{C}$ à laquelle on a ajouté le point ∞ ; *un cercle de* $\widehat{\mathbb{C}}$ est un cercle de $\mathbb{C}$. Soit h_0 l'homographie définie par : $h_0(z)=1/z$.

2. Soit D une droite contenant 0. Montrer que $h_0(D)$ est une droite contenant 0.
3. Soit D une droite ne contenant pas 0. Montrer que $h_0(D)$ est un cercle passant par 0.
4. Soit C un cercle tel que $0\notin C$. Montrer que $h_0(C)$ est un cercle dont on donnera le centre et le rayon en fonction de ceux de C.
5. Déduire des questions précédentes que l'image d'une droite ou d'un cercle de $\widehat{\mathbb{C}}$ par une homographie est une droite ou un cercle.
   Indication : si $c\neq 0$ et $cz+d\neq 0$, remarquer que $\dfrac{az+b}{cz+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{b-\frac{ad}{c}}{cz+d}$.
6. On considère l'homographie h définie par $h(z)=\frac{z-i}{z+i}$.

(a) Déterminer l'image de $\mathbb{R}$ et de $i\mathbb{R}$ par h.

(b) Idem pour l'image du quadrant $\{z \in \mathbb{C} \,|\mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$.

Exercice 3. Soit $\varphi : z \mapsto \frac{1}{z}$. Déterminer $\varphi(\gamma)$ où :
1) γ est le cercle de centre i et de rayon 1.
2) γ est la droite d'équation $2x + 2y - 1 = 0$.

Exercice 4. 1) Déterminer l'image de l'axe réel par l'homographie $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$.
2) En déduire l'image par f du demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im(z)} < 0\}$
3) Déterminer l'image de la bande $B := \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im(z)} < \pi\}$ par $g(z) = -e^z$.
4) Déduire des questions précédentes une bijection holomorphe transformant la bande B en le disque unité $D(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Exercice 5. Soit $f : z \mapsto \sin(z)$ et $g : z \mapsto \cos(z)$.
1) Trouver l'image par f de la droite d'équation $\{x = \frac{\pi}{2}\}$.
2) Trouver l'image par f du segment $\{-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, y = 0\}$.
3) Trouver l'image par g du segment $\{0 < x < \pi, y = a\}$ avec $a > 0$.

Exercice 6 (Lemme de Schwarz.)**.** Soit $D = D(0,1)$ le disque unité ouvert et soit f holomorphe sur D. On suppose que : $f(0) = 0$ et $f(D) \subseteq D$.

1. En considérant $g : z \mapsto \frac{f(z)}{z}$, montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$ et $|f'(0)| \leq 1$.
2. On suppose de plus que $|f'(0)| = 1$ ou bien qu'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et pour tout $z \in D$, $f(z) = \lambda z$.

Exercice 7. Soit f une fonction entière telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|}$. Montrer que f est constante.

Exercice 8. Soient f et g deux fonctions entières telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |g(z)|$.

1. Montrer que tout zéro z_0 de g est un zéro de f et que son ordre comme zéro de f est supérieur ou égal à son ordre comme zéro de g.
2. Montrer que f et g sont proportionnelles.