Université Claude Bernard - Lyon 1 | **Semestre automne 2023-2024**
M1 - Mathématiques générales | UE : Analyse Fonctionnelle 1

Feuille d'exercices n° 2 : Compacité et espaces de fonctions continues

---

<u>**Exercice 1.**</u> *Théorème de Riesz.*
Dans cet exercice on fixe un espace vectoriel normé $(X, \|\cdot\|)$.

1. (a) Soit Y un sous-espace vectoriel fermé de X, distinct de X, et $0 < r < 1$. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, Y) \geqslant r$.
   Indication. Fixer $u \in X \backslash Y$ de norme 1, un vecteur $y \in Y$ tel que $\|u - y\| \leqslant \frac{1}{r} d(u, Y)$, et considérer $x = \frac{u-y}{\|u-y\|}$.
   (b) On suppose que Y est de dimension finie, contenu dans X et distinct de X. Montrer qu'il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $d(x, Y) = 1$.
2. Dans cette question on suppose que X n'est pas de dimension finie.
   (a) Construire une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ d'éléments de X tels que $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbf{N}$, et $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ pour tout $n \neq m \in \mathbf{N}$.
   (b) Montrer que la boule unité fermée de $(X, \|\cdot\|)$ n'est pas compacte.

<u>**Exercice 2.**</u> Montrer que tout espace métrique compact est séparable.

<u>**Exercice 3.**</u> Soit (X, d) un espace métrique complet, et $K \subset X$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. (K, d) est compact.
2. K est fermé dans (X, d) et (K, d) est *précompact*, autrement dit pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $k_1, \ldots, k_n \in K$ tels que $K \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} B(k_i, \varepsilon)$.

Indication. Montrer que dans un espace précompact toute suite admet une sous-suite de Cauchy.

<u>**Exercice 4.**</u> Soit $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite de fonctions de $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$.

1. On suppose que $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbf{N}$ et qu'il existe une constante M telle que $\|f_n'\|_\infty \leqslant M$ pour tout $n \in N$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge uniformément. La limite appartient-elle nécessairement à $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$?
2. On suppose qu'il existe une constante M telle que $\|f_n\|_\infty \leqslant M$ et $\|f_n'\|_\infty \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbf{N}$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ qui converge uniformément. La limite appartient-elle nécessairement à $\mathcal{C}^1([0,1], \mathbf{R})$?

<u>**Exercice 5.**</u> Soit $f \colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ une fonction continue à support compact différente de la fonction nulle.
Pour $n \in \mathbf{N}$ et $x \in \mathbf{R}$ on pose $f_n(x) = f(x + n)$. Montrer que :

1. La famille $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est équicontinue.
2. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ $(f_n(x))_{n \in \mathbf{N}}$ est relativement compact.
3. La suite $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ n'admet pas de sous-suite convergente dans $(C_b(\mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

<u>**Exercice 6.**</u> Dans cet exercice on note $H = (L^2([0,1]), \|\cdot\|_2)$. Pour $f \in H$ et $x \in [0,1]$ on pose

$$T(f)(x) = \int_0^x f(u)du$$

1. Montrer que $T \colon H \to H$ est bien définie, continue, et que l'image de T est contenue dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R})$.
2. On note B la boule unité fermée de H. Montrer que $T(B)$ est relativement compact dans H (on pourra commencer par essayer de montrer que $T(B)$ est relativement compact dans $(\mathcal{C}([0,1], \mathbf{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 7. *Théorème de Stone–Weierstrass.*
Dans cet exercice, on fixe un espace métrique compact (X, d), ainsi qu'un sous-espace vectoriel $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ avec les propriétés suivantes :

- Pour tout $f, g \in \mathcal{A}$ leur produit fg appartient aussi à $\mathcal{A}$.
- Les fonctions constantes appartiennent à $\mathcal{A}$.
- Pour tout $x \neq y \in X$, il existe $f \in \mathcal{A}$ tel que $f(x) \neq f(y)$.

Le premier objectif de l'exercice est de démontrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathcal{C}(X, \mathbf{R}), \| \cdot \|_\infty)$.

1. Faire le lien entre cet énoncé et le théorème de Weierstrass, qu'on suppose connu (et qu'on va utiliser dans la suite).
2. (a) Montrer que si $f, g \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ on a $\max(f, g) = \frac{f+g+|f-g|}{2}$; donner une formule analogue pour $\min(f, g)$.
   (b) Montrer que si $f, g \in \mathcal{A}$ alors $\max(f, g)$ et $\min(f, g)$ appartiennent à $\overline{\mathcal{A}}$.
   Indication. Commencer par traiter le cas où $\|f\|_\infty$ et $\|g\|_\infty$ sont plus petits que $\frac{1}{2}$, et utiliser le fait que $t \mapsto |t|$ est limite uniforme de fonctions polynômes sur $[0, 1]$.
3. Montrer que si $x_1 \neq x_2 \in X$ et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbf{R}$ alors il existe $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x_1) = \alpha_1$ et $f(x_2) = \alpha_2$.
4. On fixe $g \in \mathcal{C}(X, \mathbf{R})$ et $\varepsilon > 0$.
   (a) Soit $x \in X$. Pour tout $y \in X$ on fixe $f_y \in \mathcal{A}$ telle que $f_y(x) = g(x)$ et $f_y(y) = g(y)$.
   Montrer, à l'aide de la propriété de Borel–Lebesgue, qu'il existe $y_1, \ldots, y_n \in X$ tels que pour tout $z \in X$ il existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $f_{y_i}(z) > g(z) - \varepsilon$.
   Indication. Considérer les ouverts $U_y = \{z \colon f_y(z) > g(z) - \varepsilon\}$.
   On pose $h_x = \max(f_{y_1}, \ldots, f_{y_n})$.
   (b) Montrer que $h_x \in \overline{\mathcal{A}}$, $h_x(x) = g(x)$ et que pour tout $z \in X$ on a $h_x(z) > g(z) - \varepsilon$.
   (c) En utilisant une idée similaire à celle qui nous a permis de construire les h_x, montrer qu'il existe $h \in \overline{\mathcal{A}}$ telle que pour tout $x \in X$ on ait $g(x) - \varepsilon < h(x) < g(x) + \varepsilon$.
5. Application. montrer que les polynômes trigonométriques sont denses dans l'espace des fonctions continues et 2π-périodiques.
6. Application. Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une partie dénombrable dense de (X, d). On note $f_n(x) = d(x_n, x)$ et on note $\mathcal{A}$ la $\mathbf{Q}$-algèbre unitaire engendrée par $\{f_n \colon n \in \mathbf{N}\}$ et la fonction constante $x \mapsto 1$.
   (a) Montrer que $\mathcal{A}$ est dénombrable.
   (b) À l'aide du théorème de Stone–Weierstrass, montrer que $\mathcal{A}$ est dense dans $(\mathcal{C}(X, \mathbf{R}), \| \cdot \|_\infty)$ et obtenir une nouvelle preuve du résultat vu en cours selon lequel $(\mathcal{C}(X, \mathbf{R}), \| \cdot \|_\infty)$ est séparable.
7. (a) Soit $\mathbf{D}$ le disque unité fermé de $\mathbf{C}$. Les fonctions polynomiales sont-elles denses dans $\mathcal{C}(\mathbf{D}, \mathbf{C})$?
   (b) Énoncer et démontrer un analogue du théorème de Stone–Weierstrass, valide pour des fonctions à valeurs complexes.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique et $K \subset X$ une partie compacte non vide. On note $\mathcal{C}_b(X)$ l'espace des fonctions continues bornées sur X, à valeurs réelles, muni de $\| \cdot \|_\infty$. On note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K, à valeurs réelles, qu'on munit également de $\| \cdot \|_\infty$.
On considère l'application $\Phi \colon \mathcal{C}_b(X) \to \mathcal{C}(K)$ qui à $f \in \mathcal{C}_b(X)$ associe sa restriction à K.

1. Montrer que Φ est continue et déterminer sa norme subordonnée.
2. Soit $f \in \mathcal{C}_b(X)$. Montrer qu'il existe $\tilde{f} \in \mathcal{C}_b(X)$ telle que $\Phi(\tilde{f}) = \Phi(f)$ et $\|\tilde{f}\|_\infty = \|\Phi(f)\|_\infty$.
3. Á l'aide du théorème de Stone–Weierstrass, démontrer que $\mathrm{Im}(\Phi)$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$.
4. Montrer que $(\mathrm{Im}(\Phi), \| \cdot \|_\infty)$ est un espace de Banach.
   Indication. Considérer une série absolument convergente $\sum_n \Phi(f_n)$ dans $\mathrm{Im}(\Phi)$; justifier et exploiter le fait que $\sum_n \tilde{f}_n$ est aussi absolument convergente.
5. Montrer que toute $f \in \mathcal{C}(K)$ admet un prolongement continu $g \in \mathcal{C}(X)$ tel que $\|g\|_\infty = \|f\|_\infty$.