Licence de Mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse
Année 2017-2018

Fiche TD 2

Exercice 1. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont fermés ?

a) $\{(1/n,0);\ n=1,2,\ldots\}$;
b) $\{(x,y);\ y=x^2\}$;
c) $\{(m,n);\ m,n\in\mathbb{Z}\}$.
d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 1\}$;
e) $[0,\infty[$;
f) $\mathbb{Q}$;
g) $\mathbb{Q}\cap[0,1]$;
h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$;
i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1 \text{ et } y=x^2\}$;
j) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 1 \text{ et } 0\leq y\leq 1/x\}$.

Exercice 2. On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques. Calculer la norme de cette application dans les cas suivants :

a) $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont tous deux munis de la norme ℓ^∞.
b) $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme ℓ^1 et $\mathbb{R}^2$ de la norme ℓ^∞.
c) $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne et $\mathbb{R}^2$ de la norme ℓ^∞.

Exercice 3. Soit $(E,\|\cdot\|_E)$ et soit $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit u une application linéaire, $u : E\to F$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) l'application u est continue.
b) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, convergente de limite 0, la suite $(u(x_n))_n$ est bornée dans F.

Exercice 4. On considère $E=\mathbb{R}[X]$ et A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\|P\|=\sup\{|P(x)|\,|\,x\in A\}$ soit une norme sur E.
b) La condition précédente étant vérifiée, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ définie par $\phi(P)=P(0)$ soit continue sur E. (Indication : on considèrera des monômes de la forme $n\left(\dfrac{X^2-b^2}{b^2}\right)^n$.)

Exercice 5. Sur $\mathbb{C}[X]$ on considère la norme définie par $\|P\|=\sup|a_i|$ si $P(X)=\sum_{i=0}^{n} a_iX^i$. Pour tout x_0 on considère l'application linéaire $\phi:\mathbb{C}[X]\to\mathbb{C}$ définie par $\phi(P)=P(x_0)$. Déterminer les x_0 pour lesquels ϕ est continue et calculer alors sa norme.

Exercice 6. Soit $\mathbb{R}_n[X]\subset\mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré n au plus. Montrer que

$$P\to\sup_{x\in[0,1]}|P(x)|=\|P\|$$

est une norme ; on note, en particulier, $E_n\subset\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes normalisés (coefficient 1 pour le monôme maximal) de degré au plus n. Montrer qu'il existe $a(n)\in\mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall P\in E_n\quad \|P\|\geq a(n).$$

Exercice 7. Soit C l'espace vectoriel des suites convergentes de nombres réels et C_0 le sous-espace des suites convergentes vers 0. On munit C et C_0 de la norme ℓ^∞.

a) Montrer que C_0 est fermé dans C.

b) On définit une application T de C dans C_0 en associant à la suite (x_n) la suite (y_n) définie par $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ et $y_n = x_{n-1} - \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ pour $n \geq 1$.

(i) Montrer que T est linéaire continue et calculer $\|T\|$.

(ii) Montrer que T est bijective.

(iii) Montrer que pour tout $x \in C$, $\|T(x)\| \geq \dfrac{1}{2}\|x\|$.

(iv) Conclure que C et C_0 sont isomorphes.

Exercice 8. Une base de $\mathbb{K}^n$ étant fixée, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on considère les normes

$$|X|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{et} \quad |X|_\infty = \sup_{i\in\{1\ldots n\}} |x_i|.$$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on leur associe les normes

$$\|A\|_p = \sup_{|X|_p=1} |AX|_p \quad p \in \{1,\infty\}.$$

Vérifiez que pour $A = (a_{ij})$ on a

$$\|A\|_1 = \sup_j \sum_i |a_{ij}| \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \sup_i \sum_j |a_{ij}|.$$

En déduire que $\sup\limits_j \sum\limits_i |a_{ij}|$ et $\sup\limits_i \sum\limits_j |a_{ij}|$ définissent des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 9. Les formes linéaires suivantes sont définies sur $\mathcal{C}([-1,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer qu'elles sont continues et calculer leur norme.

a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 sign(x) f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx - f(0)$

d) $\dfrac{f(a)+f(-a)-2f(0)}{a^2}$, où $a \in]0,1]$ est une constante.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} f(\frac{1}{n})$.

Exercice 10.

a) Montrer que sur $\mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_n = \sum\limits_{k=0}^{n} |P(k)|$ définit une norme.

b) Déterminer la norme de l'application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui au polynôme $P(X)$ associe le polynôme $XP(X)$, quand ces espaces sont munis respectivement des normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_3$.

Exercice 11. Soit $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On considère $T : E \to \mathbb{R}$ linéaire tel que $f \geq 0$ implique $Tf \geq 0$. Montrer que T est continue.

Exercice 12. Montrer que $|f|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2\ dt}$ définit une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.

Montrer que la forme linéaire $f \to f(0)$ n'est pas continue pour cette norme. En déduire que $\left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ f(0) = 0\right\}$

n'est pas fermé.

Montrer que les sous-espaces $F_1 = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \forall x \in [0, \frac{1}{2}],\ f(x) = 0 \right\}$ et $F_2 = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \forall x \in [\frac{1}{2}, 1],\ f(x) = 0 \right\}$ sont fermés dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ avec cette norme, que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ mais que $F_1 \oplus F_2$ n'est pas fermé.

Exercice 13. Sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues $u : (E, \| \|_E) \to (F, \| \|_F)$, on sait que l'on peut mettre la norme

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Montrer que ce sup est en fait un maximum quand E est de dimension finie. Est-ce encore vrai en dimension infinie ?

Exercice 14. Montrer que dans un espace vectoriel normé $(E, \| \|_E)$, on ne peut avoir deux applications linéaires continues u et v telles que

$$u \circ v - v \circ u = Id.$$

(On vérifiera $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1}$).