Licence de Mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse
Année 2019-2020

Fiche TD 2

Exercice 1. Montrer que si N_1 et N_2 sont deux normes équivalentes alors les ouverts associés sont les mêmes et les notions de convergence, limite et continuité ne changent pas.

Exercice 2. Lesquels des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^2$ sont fermés ?

a) $\{(1/n,0);\ n=1,2,\ldots\}$;
b) $\{(x,y);\ y=x^2\}$;
c) $\{(m,n);\ m,n\in\mathbb{Z}\}$.
d) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\leq 1\}$;
e) $[0,\infty[$;
f) $\mathbb{Q}$;
g) $\mathbb{Q}\cap[0,1]$;
h) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2=1\}$;
i) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq 1 \text{ et } y=x^2\}$;
j) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x\geq 1 \text{ et } 0\leq y\leq 1/x\}$.

Exercice 3. On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ de matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ dans les bases canoniques. Calculer la norme de cette application dans les cas suivants :

a) $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$ sont tous deux munis de la norme ℓ^∞.
b) $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme ℓ^1 et $\mathbb{R}^2$ de la norme ℓ^∞.
c) $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne et $\mathbb{R}^2$ de la norme ℓ^∞.

Exercice 4. Soit $(E,\|\cdot\|_E)$ et soit $(F,\|\cdot\|_F)$ deux espaces vectoriels normés. Soit u une application linéaire, $u:E\to F$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

a) l'application u est continue.
b) pour toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de E, convergente de limite 0, la suite $(u(x_n))_n$ est bornée dans F.

Exercice 5.

a) Sur $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ montrer que la quantité
$$N(f)=\sqrt{\int_0^1 |f(t)|^2+|f'(t)|^2\ dt}$$
est une norme.

b) Montrer qu'il existe une constante $C>0$ telle que : $\|f\|_\infty\leq CN(f), \forall f\in\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$. Les deux normes N et $\|\ \|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

c) Montrer que $F_0=\left\{f\in\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R}),\ f(0)=0\right\}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ pour la norme N et que la quantité $N'(f)=\sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2\ dt}$ est une norme sur F_0 équivalente à N.

Exercice 6. Soit $E=C^1([0,1];\mathbb{R})$.

a) Montrer que les expressions suivantes définissent des normes sur E :

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f|, \qquad \|f\|_\infty = \sup|f|, \qquad \|f\|_3 = |f(0)| + \sup|f'|.$$

b) Montrer que $\|f\|_1 \leq \|f\|_\infty \leq \|f\|_3$.

c) Montrer que l'application identité est continue de $(E, \|\cdot\|_3)$ à valeurs dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$.

d) Soit $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$. Étudier la convergence de f_n dans $(E, \|\cdot\|_3)$ et dans $(E, \|\cdot\|_\infty)$. L'application identité est-elle continue de $(E, \|\cdot\|_\infty)$ à valeurs dans $(E, \|\cdot\|_3)$?

e) Soit $g_n(x) = \dfrac{x^n}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la suite g_n pour les trois normes définies dans la première question (discuter suivant α).

Exercice 7. On considère $E = \mathbb{R}[X]$ et A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\|P\| = \sup\{|P(x)| \,|\, x \in A\}$ soit une norme sur E.

b) La condition précédente étant vérifiée, donner une condition nécessaire et suffisante pour que ϕ définie par $\phi(P) = P(0)$ soit continue sur E. (Indication : on considèrera des monômes de la forme $n\left(\dfrac{X^2 - b^2}{b^2}\right)^n$.)

Exercice 8. Sur $\mathbb{C}[X]$ on considère la norme définie par $\|P\| = \sup|a_i|$ si $P(X) = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i$. Pour tout x_0 on considère l'application linéaire $\phi : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}$ définie par $\phi(P) = P(x_0)$. Déterminer les x_0 pour lesquels ϕ est continue et calculer alors sa norme.

Exercice 9. Soit $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}[X]$ le sous-espace vectoriel des polynômes de degré n au plus. Montrer que

$$P \to \sup_{x \in [0,1]} |P(x)| = \|P\|$$

est une norme ; on note, en particulier, $E_n \subset \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes normalisés (coefficient 1 pour le monôme maximal) de degré au plus n. Montrer qu'il existe $a(n) \in \mathbb{R}_+^*$ tel que

$$\forall P \in E_n \quad \|P\| \geq a(n).$$

Exercice 10. Soit C l'espace vectoriel des suites convergentes de nombres réels et C_0 le sous-espace des suites convergentes vers 0. On munit C et C_0 de la norme ℓ^∞.

a) Montrer que C_0 est fermé dans C.

b) On définit une application T de C dans C_0 en associant à la suite (x_n) la suite (y_n) définie par $y_0 = \lim_{n\to\infty} x_n$ et $y_n = x_{n-1} - \lim_{n\to\infty} x_n$ pour $n \geq 1$.

(i) Montrer que T est linéaire continue et calculer $\|T\|$.

(ii) Montrer que T est bijective.

(iii) Montrer que pour tout $x \in C$, $\|T(x)\| \geq \dfrac{1}{2}\|x\|$.

(iv) Conclure que C et C_0 sont isomorphes.

Exercice 11. Une base de $\mathbb{K}^n$ étant fixée, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, on considère les normes

$$|X|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \quad \text{et} \quad |X|_\infty = \sup_{i \in \{1\ldots n\}} |x_i|.$$

Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on leur associe les normes

$$\|A\|_p = \sup_{|X|_p = 1} |AX|_p \quad p \in \{1, \infty\}.$$

Vérifiez que pour $A = \left(a_{ij}\right)$ on a

$$\|A\|_1 = \sup_j \sum_i \left|a_{ij}\right| \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \sup_i \sum_j \left|a_{ij}\right|.$$

En déduire que $\sup_j \sum_i \left|a_{ij}\right|$ et $\sup_i \sum_j \left|a_{ij}\right|$ définissent des normes d'algèbre sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 12. Les formes linéaires suivantes sont définies sur $\mathcal{C}([-1,1])$ muni de la norme de la convergence uniforme. Montrer qu'elles sont continues et calculer leur norme.

a) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$

b) $\displaystyle\int_{-1}^1 sign(x) f(x)\,dx$

c) $\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx - f(0)$

d) $\dfrac{f(a)+f(-a)-2f(0)}{a^2}$, où $a \in]0,1]$ est une constante.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} f(\frac{1}{n})$.

Exercice 13.

a) Montrer que sur $\mathbb{R}_n[X]$, $\|P\|_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} |P(k)|$ définit une norme.

b) Déterminer la norme de l'application linéaire f de $\mathbb{R}_2[X]$ dans $\mathbb{R}_3[X]$ qui au polynôme $P(X)$ associe le polynôme $XP(X)$, quand ces espaces sont munis respectivement des normes $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_3$.

Exercice 14. Soit $E = \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ muni de la topologie de la convergence uniforme. On considère $T : E \to \mathbb{R}$ linéaire tel que $f \geq 0$ implique $Tf \geq 0$. Montrer que T est continue.

Exercice 15.

a) Montrer que $|f|_2 = \sqrt{\displaystyle\int_0^1 |f(t)|^2\ dt}$ définit une norme sur $\mathcal{C}^0([0,1])$.

b) Montrer que la forme linéaire $f \to f(0)$ n'est pas continue pour cette norme. En déduire que l'ensemble $\left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ f(0) = 0\right\}$ n'est pas fermé.

c) Montrer que les sous-espaces

$$F_1 = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1]),\ \forall x \in [0,\frac{1}{2}],\ f(x) = 0\right\}$$

et

$$F_2 = \left\{f \in \mathcal{C}^0([0,1]), \forall x \in [\frac{1}{2},1],\ f(x) = 0\right\}$$

sont fermés dans $\mathcal{C}^0([0,1])$ avec cette norme, que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$ mais que $F_1 \oplus F_2$ n'est pas fermé.

Exercice 16. Sur l'espace vectoriel des applications linéaires continues $u : (E, \|\ \|_E) \to (F, \|\ \|_F)$, on sait que l'on peut mettre la norme

$$\|u\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|u(x)\|_F}{\|x\|_E}.$$

Montrer que ce sup est en fait un maximum quand E est de dimension finie. Est-ce encore vrai en dimension infinie ?

Exercice 17. Montrer que dans un espace vectoriel normé $(E, \| \|_E)$, on ne peut avoir deux applications linéaires continues u et v telles que

$$u \circ v - v \circ u = Id.$$

(On vérifiera que $u^n \circ v - v \circ u^n = nu^{n-1}$).