
Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Soit $f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = M^{-1}$. Déterminer la différentielle de f , d'abord en $M = I_n$ puis en un point M quelconque.

Exercice 2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit u un endomorphisme symétrique de E (i.e. $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$).

1. On définit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $f(x) = \langle u(x), x \rangle$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.
2. Soit $g : E \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \frac{f(x)}{\langle x, x \rangle}.$$

Montrer que g est différentiable en tout point.

Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a :

$$Dg(a) = 0 \iff a \text{ est un vecteur propre de } u.$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par $f(0, y) = 0$ et $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que f admet une dérivée au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur de \mathbb{R}^2 alors que f n'est pas continue en ce point.

Exercice 4. Calculer les dérivés partiels en tout point de \mathbb{R}^2 de la fonction suivante : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \min(x, y^2)$.

Exercice 5. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ en posant $f(x, y) = \varphi(\frac{y}{x})$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a

$$x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que f est homogène de degré α si

$$\forall t > 0, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(t(x, y)) = t^\alpha f(x, y).$$

Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$

Pour l'implication " \Leftarrow ", on pourra considérer l'application $g : t \mapsto f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application différentiable. On suppose que $\lim_{\|v\| \rightarrow +\infty} \|f(v)\| = +\infty$ et que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $Df(v)$ est injective. Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective. Soit $a \in \mathbb{R}^2$, on définit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $v \mapsto \|f(v) - a\|^2$.

1. Déterminer $Dg(v)$ en tout point v .
2. Montrer que g atteint sa borne inférieure en un certain point v_0 et que $Dg(v_0) = 0$ puis conclure.

Exercice 8. Soit F une partie fermée de \mathbb{R}^n munie de sa topologie usuelle. On définit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, F)$. On rappelle que f est 1-lipschitzienne et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $y \in F$ tel que $f(x) = d(x, y)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$. On suppose que f est différentiable en x . Montrer que $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} \leq 1$.
2. Soit $y \in F$ tel que $d(x, y) = f(x)$.
On considère la fonction $\varphi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f((1-t)x + ty)$.
En calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que $Df(x)\left(\frac{x-y}{\|x-y\|}\right) = 1$ et que $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})} = 1$.
3. En déduire que y est unique.

Exercice 9. On considère $E = l^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles (u_n) telles que $\|(u_n)\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est fini. L'espace vectoriel E est alors normé par la norme $\|\cdot\|_1$.

1. Montrer que pour toute forme linéaire continue L sur E , il existe une suite bornée $a = (a_0, a_1, \dots)$ telle que pour tout $(u_n) \in E$, $L((u_n)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$.
2. Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$ (vue comme application de E vers \mathbb{R}) n'est différentiable en aucun point de E . On pourra raisonner par l'absurde en s'aidant de la question 1.