**Feuille d'exercices n° 2**

**Exercice 1.** ($\star$) Soit $f : \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = M^{-1}$. Déterminer la différentielle de $f$, d'abord en $M = \mathrm{I}_n$ puis en un point $M$ quelconque.

**Exercice 2.** Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et soit $u$ un endomorphisme symétrique de $E$ (i.e. $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$).

1. On définit $f : E \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \langle u(x), x\rangle$. Montrer que $f$ est différentiable sur $E$ et déterminer sa différentielle en tout point.
2. Soit $g : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \frac{f(x)}{\langle x, x\rangle}.$$
Montrer que $g$ est différentiable en tout point.
Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a :
$$Dg(a) = 0 \iff a \text{ est un vecteur propre de } u.$$

**Exercice 3.** ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0, y) = 0$ et $f(x, y) = \frac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que $f$ admet une dérivée au point $(0, 0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ alors que $f$ n'est pas continue en ce point.

**Exercice 4.** Calculer les dérivés partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x, y) \mapsto \min(x, y^2)$.

**Exercice 5.** ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application diffŕentiable sur $\mathbb{R}^2$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ par
$$g(x, y) = f(x^2 - y^2, 2xy) \qquad h(x, y, z) = f(2x - yz, xy - 3z).$$
Déterminer les dérivées partielles de $g$ et $h$ en fonction de celles de $f$ et écrire les matrices jacobiennes de $g$ et $h$ en un point quelconque.

**Exercice 6.** ($\star$) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $f(x, y) = \varphi(\frac{y}{x})$. Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a
$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0.$$

**Exercice 7.** ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que $f$ est homogène de degré $\alpha$ si
$$\forall t > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(t(x, y)) = t^\alpha f(x, y).$$
Montrer que $f$ est homogène de degré $\alpha$ si et seulement si
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$
Pour l'implication "$\Leftarrow$", on pourra considérer l'application $g : t \mapsto f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et montrer que $g$ est solution d'une équation différentielle.

**Exercice 8.** Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application différentiable. On suppose que $\lim_{\|v\| \to +\infty} \|f(v)\| = +\infty$ et que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $Df(v)$ est injective. Le but de l'exercice est de montrer que $f$ est surjective.
Soit $a \in \mathbb{R}^2$, on définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|f(v) - a\|^2$.

1. Déterminer $Dg(v)$ en tout point $v$.
2. Montrer que $g$ atteint sa borne inférieure en un certain point $v_0$ et que $Dg(v_0) = 0$ puis conclure.

**Exercice 9.** Soit $F$ une partie fermée de $\mathbb{R}^n$ munie de sa topologie usuelle. On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},\ x \mapsto d(x, F)$. On rappelle que $f$ est 1-lipschitzienne et que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, il existe $y \in F$ tel que $f(x) = d(x, y)$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus F$. On suppose que $f$ est différentiable en $x$. Montrer que $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} \leq 1$.
2. Soit $y \in F$ tel que $d(x, y) = f(x)$.
   On considère la fonction $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{R},\ t \mapsto f((1 - t)x + ty)$.
   En calculant $\varphi'(0)$ de deux façons, montrer que $Df(x)(\frac{x-y}{\|x-y\|}) = 1$ et que $\|Df(x)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})} = 1$.
3. En déduire que $y$ est unique.

**Exercice 10.** On considère $E = l^1(\mathbb{R})$ l'ensemble des suites réelles $(u_n)$ telles que $\|(u_n)\|_1 := \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$ est fini. L'espace vectoriel $E$ est alors normé par la norme $\| \ \|_1$.

1. Montrer que pour toute forme linéaire continue $L$ sur $E$, il existe une suite bornée $a = (a_0, a_1, \ldots)$ telle que pour tout $(u_n) \in E$, $L((u_n)) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n u_n$.
2. Montrer que la norme $\| \ \|_1$ (vue comme application de $E$ vers $\mathbb{R}$) n'est différentiable en aucun point de $E$. On pourra raisonner par l'absurde en s'aidant de la question 1.