Feuille d'exercices n° 2: Fonctions différentiables

Exercice 1. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \text{tr}(AB)$. Calculer la différentielle de f en tout point.
À quelle condition Df est-elle surjective ?

Exercice 2. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit f l'application $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto AB$. Calculer la différentielle de f en tout point. A quelle condition sur B la différentielle $Df(A)$ est surjective / injective ?

Exercice 3. Soit f l'application $f : A \in M_n(\mathbb{R}) \mapsto \text{tr}\left({}^t AA\right)$. Calculer la différentielle de f en tout point.

Exercice 4. On note det et tr le déterminant et la trace d'une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Montrer que la différentielle de det en $X \in M_n(\mathbb{R})$ est l'application $H \mapsto \text{tr}({}^t\overline{X}H)$ où $\overline{X}$ est la comatrice de X.

Exercice 5. Soit $f : \text{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(M) = M^{-1}$. Déterminer la différentielle de f, d'abord en $M = \text{I}_n$ puis en un point M quelconque.

Exercice 6. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et soit u un endomorphisme symétrique de E (i.e. $\forall x, y \in E,\ \langle u(x), y\rangle = \langle x, u(y)\rangle$).

1. On définit $f : E \to \mathbb{R}$ par $f(x) = \langle u(x), x\rangle$. Montrer que f est différentiable sur E et déterminer sa différentielle en tout point.
2. Soit $g : E \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ définie par
$$g(x) = \frac{f(x)}{\langle x, x\rangle}.$$
Montrer que g est différentiable en tout point.
Montrer que pour tout $a \in E \setminus \{0\}$, on a :
$$Dg(a) = 0 \iff a \text{ est un vecteur propre de } u.$$

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable.
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on dit que f est homogène de degré α si
$$\forall t > 0,\ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(t(x, y)) = t^\alpha f(x, y).$$
Montrer que f est homogène de degré α si et seulement si
$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \alpha f(x, y).$$
Pour l'implication "$\Leftarrow$", on pourra considérer l'application $g : t \mapsto f(tx, ty) - t^\alpha f(x, y)$ sur $\mathbb{R}_{>0}$ et montrer que g est solution d'une équation différentielle.

Exercice 8. On note $C^0([0, 1])$ les fonctions continues sur $[0, 1]$. Soit $f : \varphi \in C^0([0, 1]) \mapsto \int_0^1 \varphi^4(t)dt \in \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f.

Exercice 9. Soit $f : \varphi \in C^2([0, 1]) \mapsto \int_0^1 (\varphi')^2(t) \in \mathbb{R}$. Calculer la différentielle de f. Caractériser les éléments $\varphi \in C^2([0, 1])$ tels que la différentielle Df s'annule en φ.