Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2023-2024**

M1 - Mathématiques générales — UE : Analyse Fonctionnelle 1

Feuille d'exercices n° 3 : Espaces de Hilbert

__Exercice 1.__ Soit H un espace de Hilbert complexe ; on le voit comme un $\mathbf{R}$-espace vectoriel, et on le munit de la forme bilinéaire $b\colon (x,y) \mapsto \mathrm{Re}(\langle x,y\rangle)$.

1. Montrer que $\widetilde{H} = (H,b)$ est un espace de Hilbert réel.
2. Donner une formule permettant de retrouver le produit scalaire de H à partir de b.
3. Comment produire une base orthonormée de $\widetilde{H}$ à partir d'une base orthonormée de H ?

__Exercice 2.__ *Identité du parallélogramme et sa réciproque (théorème de Jordan-Fréchet-von Neumann)*

1. Montrer l'égalité suivante, dite *identité du parallélogramme* (pourquoi ?), valable pour $x, y \in H$
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right). \tag{1}$$
2. Soit $(X, \|\cdot\|)$ un espace de Banach réel tel que l'identité (1) soit satisfaite pour tous x, y dans X. Montrer que X est un espace de Hilbert (c'est-à-dire que la norme de X provient d'un produit scalaire).
Indication. Considérer la fonction $B : (x,y) \mapsto \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$ et montrer que $B(x,y) = B(y,x)$, $B(x,-y) = -B(x,y)$ et $B(x+y,z) = B(x,z) + B(y,z)$ — pour ce dernier point appliquer (1) à (x,y), $(x+z, y+z)$ et $(x+y+z, z)$.
3. Montrer le même résultat pour un espace de Banach complexe.

__Exercice 3.__ *Autour du théorème de projection sur un convexe fermé.*

1. À l'aide du résultat du premier exercice de cette feuille, expliquer comment déduire le cas complexe du théorème de projection sur un convexe fermé (dans un espace de Hilbert) à partir du cas réel.
2. Soit $a < b$ deux réels. Dans l'espace de Hilbert $H = L^2([0,1],\mathbf{R})$, on considère le sous-ensemble
$$C = \left\{f \in L^2([0,1])\colon a \leqslant f \leqslant b \text{ presque partout}\right\}.$$
Vérifier que C est convexe et fermé, et déterminer $P_C(g)$ pour $g \in H$.
3. Supposons que H admette une base hilbertienne $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$, et posons $F = \left\{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)e_n \colon n \in \mathbf{N}\right\}$. Montrer que F est fermé. Est-ce que 0 admet une projection sur F ?
4. Soit $E \neq H$ un sous-espace vectoriel dense de H (pouvez-vous donner un exemple ?), et $z \in H\backslash E$. On définit
$$F = \{e \in E\colon \langle e,z\rangle = 0\}$$
   (a) Montrer que F est un sous-espace vectoriel fermé de E, et que $F \neq E$.
   (b) Soit $e \in E\backslash F$. Montrer que e n'admet pas de projection orthogonale sur F.
   Indication. Commencer par montrer que F est dense dans $(\mathbf{R}z)^\perp$.

__Exercice 4.__ Soit E, F deux sous-espaces vectoriels fermés d'un espace de Hilbert H.
Montrer que $(E+F)^\perp = E^\perp \cap F^\perp$ et que $(E\cap F)^\perp = \overline{E^\perp + F^\perp}$.

__Exercice 5.__
Soit $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni du produit scalaire de $L^2([0,1])$, et de la norme associée. Pour $a \in \,]0,1[$ on note F_a l'ensemble des éléments de E qui sont nuls sur $[0,a]$.

1. Montrer que F_a est fermé dans E et déterminer $F_a^\perp$.
2. Montrer que $F_a \oplus F_a^\perp \neq E$.
3. Expliquer.

Exercice 6. Soit H, H' deux espaces de Hilbert séparables, de dimension infinie. Montrer qu'il existe une isométrie linéaire T de H sur H'.
Indication. Exploiter le fait que H et H' admettent chacun une base hilbertienne dénombrable.

Exercice 7. *Convergence faible.*

1. On dit qu'une suite (x_n) d'éléments de H *converge faiblement* vers $x \in H$ si $f(x_n)$ tend vers $f(x)$ pour toute forme linéaire continue sur H.
   On suppose que H est séparable. Montrer, à l'aide du théorème de Banach–Alaoglu, que toute suite bornée d'éléments de H admet une sous-suite qui converge faiblement.
   (par ailleurs, vous verrez au second semestre qu'une suite faiblement convergente dans un espace de Hilbert est nécessairement bornée)
2. Soit (x_n) une suite d'éléments de H qui converge faiblement vers $x \in H$.
   (a) Montrer que $\|x\| \leqslant \liminf \|x_n\|$.
   (b) On suppose de plus que $\limsup \|x_n\| \leqslant \|x\|$. Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ converge vers x.
3. Soit $(e_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une base hilbertienne de H. Montrer que (e_n) converge faiblement vers 0.
4. Soit A une partie bornée de H. On définit

$$\rho = \inf \{ r \geqslant 0 \colon \exists x \in H \; A \subset B_f(x, r) \}$$

   (où $B_f(x, r)$ désigne la boule fermée de centre x et de rayon r).
   (a) Montrer qu'il existe $x \in H$ tel que $A \subseteq B(x, \rho)$ (on pourra considérer une suite r_n qui décroît vers ρ, une suite $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ bien choisie et en extraire une sous-suite faiblement convergente...)
   (b) Montrer qu'un tel x est unique (faire un dessin, et penser à l'identité du parallélogramme).

Exercice 8. *Opérateur adjoint.*
Soit H un espace de Hilbert réel et $T : H \to H$ une application linéaire continue. On rappelle que l'adjoint de T, noté T^*, est l'unique élément de $\mathcal{L}(H, H)$ tel que, pour tout $x, y \in H$, on ait $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$.

1. Montrer que $\|T\| = \sup\{ |\langle Tx, y \rangle| \colon x, y \in H, \|x\| \leqslant 1, \|y\| \leqslant 1 \}$.
2. Montrer que $\|T^*\| = \|T\|$ et que $(T^*)^* = T$.
3. Montrer que $\ker(T) = \mathrm{Im}(T^*)^{\perp}$ et $\overline{\mathrm{Im}(T)} = \ker(T^*)^{\perp}$.
4. On suppose que $T = T^*$ (on dit alors que T est *autoadjoint*). Montrer que

$$\|T\| = \sup\{ |\langle Tx, x \rangle| \colon x \in H, \|x\| \leqslant 1 \}$$

5. On suppose à nouveau que $T^* = T$.
   (a) On dit que T est *positif* si $\langle T(x), x \rangle \geqslant 0$ pour tout x. Montrer que dans ce cas on a

$$\forall x, y \in H \quad \langle T(x), y \rangle^2 \leqslant \langle T(x), x \rangle \langle T(y), y \rangle$$

   puis que $\ker(T) = \{ x \in H \colon \langle T(x), x \rangle = 0 \}$.
   (b) Montrer que s'il existe $x_0 \in H$ tel que $\|x_0\| = 1$ et $\langle T(x_0), x_0 \rangle = \|T\|$ alors x_0 est un vecteur propre de T pour la valeur propre $\|T\|$.
   Indication. Commencer par établir que $\|T\|\mathrm{Id} - T$ est autoadjoint positif.
   (c) Montrer que si H est de dimension finie alors T est diagonalisable dans une base orthonormale (on a ainsi retrouvé le théorème spectral).
6. Soit $H = L^2([0, 1])$, et T défini par

$$\forall f \in H \; \forall t \in [0, 1] \quad T(f)(t) = t f(t) \, .$$

   Montrer que T est continu, autodajoint et n'admet pas de valeur propre.