Licence de Mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse
Année 2017-2018

Fiche TD 3

Exercice 1. Déterminer si les fonctions suivantes ont une limite quand (x,y) tend vers $(0,0)$:

$$f_1(x,y)=\frac{|x+y|}{x^2+y^2}\ ;\quad f_2(x,y)=\frac{x^3y^3}{x^2+y^2}\ ;\quad f_3(x,y)=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\ ;\quad f_4(x,y)=\frac{\sin(x+y)}{x+y}.$$

Exercice 2. Soit $f(x,y)=\dfrac{x^2}{x^2+y^2}$. Les limites suivantes existe-t-elles :

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)\ ;\qquad \lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)\ ;\qquad \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y).$$

Exercice 3. Pour chacune des fonctions suivantes, donner son domaine de définition et dire si elle est continue. Étudier l'existence d'un prolongement par continuité en $(0,0)$.

a) $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$;

b) $g(x,y)=\sin\left(\dfrac{xy^2}{x^2+y^2}\right)$.

Exercice 4. On considère $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ avec $g\in C^1$ et on définit $\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par $\varphi(x,x)=f(x)$ et $\varphi(x,y)=\dfrac{g(x)-g(y)}{x-y}$ si $x\neq y$. Quelles conditions f et g doivent-elles vérifier pour que φ soit continue ?

Exercice 5. Montrer qu'une norme n'est jamais différentiable en 0.

Exercice 6. Donner les domaines de définition et calculer les dérivées partielles des fonctions suivantes :

$$f_1(x,y)=2x^2-3xy+4y^2\ ;\quad f_2(x,y)=\frac{x^2}{y}+\frac{y^2}{x}\ ;\quad f_3(x,y)=\sin(2x-3y)\ ;\quad f_4(x,y)=e^{x^2+xy}\ ;$$
$$f_5(x,y,z)=(x+y^2,xyz^2)\ ;\quad f_6(x,y,z)=\sin(x^2-y^2+z^2).$$

Exercice 7. Soit $f:]0,1[\times]0,1[\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} x(1-y) & \text{si } x\leq y\\ y(1-x) & \text{si } x>y.\end{cases}$$

Etudier la continuité et la différentiabilité de f.

Exercice 8. Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2y^2\sin(1/x) & \text{si } x\neq 0\\ 0 & \text{si } x=0.\end{cases}$$

Montrer que la fonction f est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$ mais que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ ne sont pas continues en certains points de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 9. Montrer que les applications suivantes sont de classe C^1. Écrire leur matrice jacobienne en un point donné.

a) $f_1(x,y)=\sin(x^2-y^2)$;

b) $f_2(x,y)=(x+y,x-y)$;

c) $f_3(x,y,z)=(xy^2,x^2e^{y+z},\sin x)$;

d) $f_4(x,y,z) = (x+y^2, xyz^2)$.

Exercice 10. On considère les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ et $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définies pas

$$f(x,y) = (\sin(xy), \cos x, e^{y^2}), \qquad g(u,v,w) = uvw.$$

a) Calculer $g \circ f$.

b) En utilisant l'expression trouvée en a), calculer les dérivées partielles de $g \circ f$.

c) Déterminer les matrices jacobiennes de f et g.

d) Retrouver le résultat de b) en utilisant un produit approprié de matrices jacobiennes.

Exercice 11. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ une fonction différentiable telle que $g(1,-1,2) = (-1,5)$ et que la matrice jacobienne de g en $(1,-1,2)$ soit égale à $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (xy, 3x^2 - 2y + 3)$. Calculer les dérivées partielles de $f \circ g$ en $(1,-1,2)$.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable et u la fonction définie par $u(x,y,z) = f(x-y, y-z, z-x)$. Montrer que u est différentiable et que $\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial u}{\partial z} = 0$.

Exercice 13. Soit $f(x,y) = \arcsin\left(\dfrac{1+xy}{\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}\right)$ et $g(x,y) = \arctan x - \arctan y$.

a) Vérifier que f est définie sur $\mathbb{R}^2$.

b) calculer les dérivées partielles premières de f et de g.

c) Simplifier f à l'aide de g.

Exercice 14. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$ et U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^2$. Soit $f : U \to \mathbb{R}^2$ une fonction qui vérifie

$$\forall x, y \in U \qquad \|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|^2.$$

Montrer que f est constante sur U (on pourra commencer par montrer que f est différentiable et calculer sa différentielle).