
Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Soit $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ une application dérivable. On suppose que $\lim_{x \to b} f'(x)$ existe. Montrer que f se prolonge par continuité en b et que f, ainsi prolongée, est dérivable à gauche en b.

Exercice 2. ($\star$) Montrer que l'égalité des accroissements finis (vraie pour les fonction de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$) est fausse en général pour les fonctions à valeurs dans un espace vectoriel de dimension plus grande que 1. Considérer la fonction $x \mapsto e^{ix}$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Exercice 3. ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (x^2 - y, x^2 + y^2)$ et soit $g = f \circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer la matrice jacobienne $J_{f,(x,y)}$ en tout point $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et calculer la matrice jacobienne $J_{g,(0,0)}$.
3. Montrer qu'il existe $\rho > 0$ tel que pour tout $(x, y) \in \bar{B}((0, 0), \rho)$, on a $\|J_{g,(x,y)}\| \leq \frac{1}{2}$.
4. Montrer que g admet un unique point fixe dans la boule $\bar{B}((0, 0), \rho)$.

Exercice 4. ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\cos x - \sin y, \sin x - \cos y)$.

1. Montrer que $\|Df(x, y)\| \leq \sqrt{2}$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
2. En déduire que pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, la suite récurennte $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ définie par
$$x_{n+1} = \frac{1}{2}(\cos x_n - \sin y_n), \qquad y_{n+1} = \frac{1}{2}(\sin x_n - \cos y_n)$$
converge. Donner l'équation satisfaite par sa limite.

Exercice 5.
1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application dérivable telle que pour tout x, $f'(x) \neq 0$. Montrer que f est un homéomorphisme sur $f(\mathbb{R})$ et que f^{-1} est dérivable en tout point de $f(\mathbb{R})$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x})$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que $f'(0)$ existe et est non nulle mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0.

Exercice 6. ($\star$) Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et soit f définie sur U par $f(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 7. ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa différentielle en tout point et vérifier qu'elle est inversible.

2. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$. Justifier que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f^{-1} est lipschitzienne (on travaillera avec la norme 1 de $\mathbb{R}^2$).
4. En déduire que f est difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. Calculer $Df^{-1}(p)$ où $p = (1 - \pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$.

Exercice 8. ($\star$) Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et on note I la matrice identité de E. Soit $f : E \to E$ définie par $f(A) = A^2$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $A \in E$ tel que $\|A - I\| < \alpha$, A admet une racine carrée.

Exercice 9. ($\star$) Etudier la courbe $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^4 + y^3 - x^2 - y^2 + x - y = 0\}$ au voisinage des points $p = (0, 0)$ et $q = (1, 1)$. On donnera, pour cela, un DL à l'ordre 2 de la fonction implicite trouvée.

Exercice 10. ($\star$) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y, z) = (x^2 - y^2 + z^2 - 1, xyz - 1)$. Soit $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ tel que $f(x_0, y_0, z_0) = (0, 0)$.
Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 et une application $\varphi : I \to \mathbb{R}^2$ tels que $\varphi(x_0) = (y_0, z_0)$ et pour tout $x \in I$, $f(x, \varphi(x)) = 0$.

Exercice 11. On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ définie par $(x, y, z) \mapsto x^2 - xy^3 - y^2 z + z^3$, ainsi que sa surface de niveau 0 dans $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer l'équation du plan tangent à cette surface au point $(1, 1, 1)$.
2. Vérifier qu'au voisinage du point $(1, 1, 1)$ cette surface est le graphe d'une fonction $z = g(x, y)$.
3. Écrire le pôlynome de Taylor d'ordre deux de g au point $(1, 1)$. Quelle est la matrice hessienne de g en ce point ?
4. Quelle est la position de la surface par rapport au plan tangent ?

Exercice 12. Soit $E = \mathbb{R}_d[X]$ l'espace vectoriel des polynômes d'une variable réelle de degré au plus d. On le munit de la norme infinie.
Soit $P_0 = c_0 + c_1 X + \cdots + c_d X^d$ un polynôme de E ayant une racine $x_0 \in \mathbb{R}$ que l'on supposera simple. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que pour tout $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{R}^{d+1}$ tel que $|a_i - c_i| < r$, le polynôme $P = a_0 + \cdots + a_d X^d$ admet une unique racine simple x_P dans $]x_0 - r; x_0 + r[$ et la fonction $P \mapsto x_P$ est de classe C^1.
Remarque : avec moins de rigueur, on dira que les racines simples dépendent continûment (et même de façon C^1) des coefficients du polynôme.
Indication : On pourra considérer $F : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $F(P, x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_d x^d$.