Licence de Mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse
Année 2017-2018

Fiche TD 4

Exercice 1. Calculer la différentielle de $f(x+y)$, $x,y \in \mathbb{R}$ et de $g(x,x)$, $x \in \mathbb{R}$ où f et g sont à valeurs réelles.

Exercice 2. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ et soit $f : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $f(A) = \mathrm{tr}(AB)$. Calculer la différentielle de f en tout point. Même question pour $g(A) = AB$. En quels points Dg est-elle injective ? Surjective ?

Exercice 3. Soit $f = f(y)$ est une fonction différentiable à valeurs réelles définie sur un ouvert de $\mathbb{R}^m$ et $g = g(x)$ une fonction différentiable d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ à valeurs dans $\mathbb{R}^m$. Montrer que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\big(f(g_1, g_2, \dots, g_m)\big) = \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{\partial g_1}{\partial x_i} + \frac{\partial f}{\partial y_2}\frac{\partial g_2}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f}{\partial y_m}\frac{\partial g_m}{\partial x_i}.$$

Exercice 4. Étudier la continuité, ainsi que l'existence et la continuité des dérivées partielles premières de la fonction suivante :

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2, & |x| > y \\ y^2, & |x| \le y \end{cases}$$

Exercice 5. Trouver $a > 0$ tel que l'application

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{|x|^{2a} y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) soit continue sur $\mathbb{R}^2$;
b) soit différentiable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Soit $a > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{|xy|^a}{x^2+y^2}.$$

a) Pour quelles valeurs de a la fonction f se prolonge par continuité en $(0,0)$?
b) Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0,0)$, pour quelles valeurs de a la fonction ainsi obtenue est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?
c) Même question pour la différentiabilité en $(0,0)$.

Exercice 7. (**Dérivées directionnelles**) Soient f la fonction définie par

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow \mathbb{R} \\ & & (x,y) & \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

a) Montrer que f est continue à tout point de $\mathbb{R}^2$.
b) Montrer que $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$.
c) Montrer en les déterminant explicitement que f admet des dérivées directionnelles dans toutes les directions en $(0,0)$.
d) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 2x + 5y + x^2(\sqrt{|y|} + \sqrt{|x|})$. Déterminer l'ensemble des points où f

a) est continue ;

b) est différentiable ;

c) est de classe C^1 ;

d) admet des dérivées partielles ;

e) admet des dérivées directionnelles.

Exercice 9. Soit $p > 0$ et

$$\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \ni (x,y) \longmapsto f(x,y) = \frac{|\sin(x+y)|^p}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

a) Pour quelles valeurs de p la fonction f se prolonge par continuité en $(0,0)$?

b) Dans le cas où f se prolonge par continuité en $(0,0)$, pour quelles valeurs de p la fonction ainsi obtenue est des classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

c) Même question pour la différentiabilité en $(0,0)$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b) Montrer que f admet des dérivées partielles secondes croisées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et montrer que $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$. Que peut-on conclure ?

Exercice 11. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique et

$$g(x) = \frac{\langle Ax, x\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Montrer que g est différentiable en tout point. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, on a :

$$Dg(a) = 0 \iff a \text{ est un vecteur propre de } A.$$

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ donnée par $f(0,y) = 0$ et $f(x,y) = \dfrac{y^2}{x}$ si $x \neq 0$. Montrer que f admet une dérivée au point $(0,0)$ suivant tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ alors que f n'est pas continue en ce point.

Exercice 13. Calculer les dérivés partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ de la fonction suivante : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \min(x,y^2)$.

Exercice 14. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit $f : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en posant $f(x,y) = \varphi(\frac{y}{x})$. Montrer que pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, on a

$$x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application différentiable. On suppose que $\lim\limits_{\|v\| \to +\infty} \|f(v)\| = +\infty$ et que pour tout $v \in \mathbb{R}^2$, $Df(v)$ est injective. Le but de l'exercice est de montrer que f est surjective.
Soit $a \in \mathbb{R}^2$, on définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ v \mapsto \|f(v) - a\|^2$.

a) Déterminer $Dg(v)$ en tout point v.

b) Montrer que g atteint sa borne inférieure en un certain point v_0 et que $Dg(v_0) = 0$ puis conclure.