Feuille d'exercices n° 4

1 Inversion et fonctions implicites.

Exercice 1. Soit E l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Montrer que l'exponentielle de matrice est un difféomorphisme local (d'un voisinage de 0 sur un voisinage de I), mais que ce n'est pas un difféomorphisme global de E sur son image pour $n \geqslant 2$.

Exercice 2 (Réduction des formes quadratiques, version différentiable)**.** On note E l'espace des matrices réelles $n\times n$ et S le sous-espace des matrices symétriques. On fixe $A_0 \in S$, inversible. Soit $\varphi : E \mapsto S$ l'application définie par

$$\varphi(M) =^t MA_0M.$$

1. Montrer que $D\varphi_I$ est surjective, et préciser son noyau.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans S et une application $A \mapsto M$ de V dans l'ensemble des matrices inversibles, de classe C^1, telle que $A =^t MA_0M$ pour tout $A \in V$. [On pourra considérer l'ensemble F des $M \in E$ telles que $A_0M \in S$, et appliquer le théorème d'inversion locale à la restriction de φ à F.]

Exercice 3 (Séparation de variables et ondes sur le plan)**.** On travaille dans le plan $\mathbb{R}^2$ avec coordonnées (t, x). Deviner deux solutions (u, v) de l'équation aux dérivées partielles

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\varphi = 0$$

telles que (u, v) forme un système de fonctions coordonnées de $\mathbb{R}^2$.
En déduire toutes les solutions de l'équation au dessus.

Exercice 4 (Deux équations, deux inconnues)**.**

1. Rappeler brièvement la discussion du système linéaire $ax+by = u, ex + dy = v$, où u, v sont donnés et x, y sont les inconnues, selon le rang de la matrice du système. Soient maintenant U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \longmapsto \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1 ; on écrira

$$\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y)). \tag{1}$$

On veut discuter le système d'équations

$$f(x, y) = u, g(x, y) = v$$

aux inconnues (x, y) pour u, v donnés.

2. On suppose que la différentielle $D\varphi(x, y)$ est de rang 2 en tout point $(x, y) \in U$. Montrer que le système (1) admet une solution unique (localement, en un sens que l'on précisera).

Exercice 5 (Inversion globale)**.** Soient k une constante strictement positive et $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1, supposée k-dilatante (pour une certaine norme), i.e.

$$\|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. On veut montrer que f est alors un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective, et que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. [On pourra raisonner sur des suites.]
2. Montrer que la différentielle $Df(x)$ est inversible pour tout x.
3. Montrer par inversion locale que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Conclure.

Exercice 6 (L'équation du troisième degré et discriminants)**.** On note (x, p, q) trois variables réelles. L'équation $x^3 + px + q = 0$ définit-elle x comme fonction implicite de p et q ? On illustrera la discussion en esquissant la surface d'équation $x^3 + px + q = 0$ dans l'espace $\mathbb{R}^3$ des coordonnées (q, p, x).

Exercice 7 (Solutions approchées)**.** Trouver une solution réelle approchée de

$$x^{11} + 0,99x - 2,01 = 0.$$

2 Point fixe.

Exercice 8 (Intégrales itérées et point fixe de Picard.)**.** Soit $A : I \mapsto M_n(\mathbb{R})$ une application C^0 de l'intervalle $I = [a, b]$ à valeur dans $M_n(\mathbb{R})$.
1) Expliquer en quoi les solutions du système linéaire :

$$\frac{du}{dt} = A(t)u(t), u(0) \in \mathbb{R}^n \tag{2}$$

sont les points fixes de l'application F :

$$F : u \in C^1(I, \mathbb{R}^n) \mapsto u(0) + \int_0^t A(s)u(s)ds \in C^1(I, \mathbb{R}^n).$$

2) Montrer que F a un point fixe dans $C^1(I, \mathbb{R}^n)$ et que la série

$$u(0) + \int_0^t dsA(s)u(0) + \cdots + \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \ldots \int_0^{s_{n-1}} ds_n A(s_1) \ldots A(s_n)u(0) + \ldots$$

converge absolument vers le point fixe de F.
3) Montrer à l'aide de la série calculée au dessus l'inégalité suivante

$$\|u(t)\| \leqslant \|u(0)\| e^{t\left(\sup_{s\in I} \|A(s)\|_{L(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)}\right)}.$$