Feuille d'exercices n° 4: Théorèmes d'inversion locale et globale

Exercice 1. Soit $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et soit f définie sur U par $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U mais n'est pas un difféomorphisme global.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x,y) = (\sin(y/2) - x, \sin(x/2) - y)$.

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer sa différentielle en tout point et vérifier qu'elle est inversible.
2. Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $f(\mathbb{R}^2)$. Justifier que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
3. Montrer que f^{-1} est lipschitzienne (on travaillera avec la norme 1 de $\mathbb{R}^2$).
4. En déduire que f est difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
5. Calculer $Df^{-1}(p)$ où $p = (1 - \pi/2, \sqrt{2}/2 - \pi)$.

Exercice 3. Soit $E = M_n(\mathbb{R})$ et on note I la matrice identité de E. Soit $f : E \to E$ définie par $f(A) = A^2$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $A \in E$ tel que $\|A - I\| < \alpha$, A admet une racine carrée.

Exercice 4. Soit E l'espace des matrices $n \times n$ à coefficients réels. Montrer que l'exponentielle de matrice est un difféomorphisme local (d'un voisinage de 0 sur un voisinage de I), mais que ce n'est pas un difféomorphisme global de E sur son image pour $n \geqslant 2$.

Exercice 5 (Réduction des formes quadratiques, version différentiable)**.** On note E l'espace des matrices réelles $n \times n$ et S le sous-espace des matrices symétriques. On fixe $A_0 \in S$, inversible. Soit $\varphi : E \mapsto S$ l'application définie par

$$\varphi(M) = {}^t M A_0 M.$$

1. Calculer le noyau de $D\varphi_I$ et montrer qu'elle est surjective.
2. Montrer qu'il existe un voisinage V de A_0 dans S et une application $A \mapsto M$ de V dans l'ensemble des matrices inversibles, de classe C^1, telle que $A =^t MA_0M$ pour tout $A \in V$. [On pourra considérer l'ensemble F des $M \in E$ telles que $A_0 M \in S$, et appliquer le théorème d'inversion locale à la restriction de φ à F en montrant que $D\varphi(I) : F \mapsto S$ est inversible.]

Exercice 6 (Séparation de variables et ondes sur le plan)**.** On travaille dans le plan $\mathbb{R}^2$ avec coordonnées (t,x). Chercher des nouvelles coordonnées (u,v) de $\mathbb{R}^2$ telles que, comme fonctions de (t,x), elles vérifient l'équation

$$\left(\partial_t^2 - \partial_x^2\right)\varphi = 0$$

et l'équation reécrite en termes des (u,v) se résout facilement.
En déduire toutes les solutions de l'équation ci dessus.

Exercice 7 (Deux équations, deux inconnues). 1. Discuter des solutions du système linéaire

$$\begin{aligned} ax + by &= u \\ ex + dy &= v, \end{aligned}$$

où u, v sont donnés et x, y sont les inconnues, selon le rang de la matrice du système.

2. Soient maintenant U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi : U \longmapsto \mathbb{R}^2$ une application de classe C^1. On écrira

$$\varphi(x, y) = (f(x, y), g(x, y)). \tag{1}$$

On veut discuter le système d'équations

$$f(x, y) = u, g(x, y) = v$$

aux inconnues (x, y) pour u, v donnés. On suppose que la différentielle $D\varphi(x, y)$ est de rang 2 en tout point $(x, y) \in U$. Montrer que le système (1) admet une solution unique (localement, en un sens que l'on précisera).

Exercice 8 (Inversion globale). Soient k une constante strictement positive et $f : \mathbb{R}^n \longmapsto \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Supposons que l'image de f est non vide, et que f est k-dilatante (pour une certaine norme), i.e.

$$\|f(x) - f(y)\| \geqslant k\|x - y\|$$

pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$. On veut montrer que f est alors un difféomorphisme global de $\mathbb{R}^n$ sur lui-même.

1. Montrer que f est injective, et que l'image $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^n$. [On pourra raisonner sur des suites.]
2. Montrer que la différentielle $Df(x)$ est inversible pour tout x.
3. Montrer par inversion globale que $f(\mathbb{R}^n)$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$. Conclure.