Université Claude Bernard - Lyon 1 — **Semestre automne 2023-2024**

M1 - Mathématiques générales — UE : Analyse Fonctionnelle 1

Feuille d'exercices n° 5 : Transformée de Fourier

Pour $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et $\xi \in \mathbf{R}^n$ on note $\hat{f}(\xi) = \int_{\mathbf{R}^n} e^{-\mathrm{i}x\cdot\xi} f(x)\,dx$. On note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R}^n)$, et on rappelle que pour tout $f \in L^1(\mathbf{R}^n) \cap L^2(\mathbf{R}^n)$ on a $\mathcal{F}(f) = \hat{f}$.

__Exercice 1.__ Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$.

1. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on pose $f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^n} f\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$.
   Montrer que $f_\varepsilon \in L^1(\mathbf{R}^n)$, que pour tout ξ on a $\widehat{f_\varepsilon}(\xi) = \hat{f}(\varepsilon\xi)$ et $|\widehat{f_\varepsilon}(\xi)| \leqslant \|f\|_1$.
2. Soit $h \in \mathbf{R}^n$. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on note $\tau_h f(x) = f(x-h)$.
   Montrer que $\tau_h f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ on a $\widehat{\tau_h f}(\xi) = e^{-\mathrm{i}h\cdot\xi}\hat{f}(\xi)$.
3. Montrer que $\bar{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ on a $\hat{\bar{f}}(\xi) = \overline{\hat{f}(-\xi)}$
4. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on note $\check{f}(x) = f(-x)$.
   Montrer que $\check{f} \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et que pour tout $\xi \in \mathbf{R}^n$ on a $\hat{\check{f}}(\xi) = \check{\hat{f}}(\xi)$.

__Exercice 2.__

1. Soit f la fonction caractéristique de l'intervalle $[0,1]$. Montrer que $f \in L^1(\mathbf{R})$ mais $\hat{f} \notin L^1(\mathbf{R})$.
2. Montrer que si f et $\hat{f}$ appartiennent à $L^1(\mathbf{R})$ alors f est continue et bornée.

__Exercice 3.__ On garde les notations du premier exercice, et on note $\mathcal{F}$ la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R}^n)$. Montrer que pour tout $f \in L^2(\mathbf{R}^n)$ on a $\mathcal{F}^*(f) = \widetilde{\mathcal{F}(f)}$.

__Exercice 4.__ Que peut-on dire d'une fonction $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ continue, à support compact et dont la transformée de Fourier est également à support compact ?
(Indication : considérer $F\colon \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $F(z) = \int_{\mathbf{R}} e^{-itz} f(t)dt$)

__Exercice 5.__

1. Soit $a \leqslant b \in \mathbf{R}$. Calculer la transformée de Fourier de la fonction indicatrice $\chi_{[a,b]}$.
2. À l'aide de ce résultat, retrouver le fait que la transformée de Fourier de toute fonction de $L^1(\mathbf{R})$ tend vers 0 à l'infini.
3. Déduire du résultat de la première question la valeur de l'intégrale $\int_{\mathbf{R}} \left(\frac{\sin(t)}{t}\right)^2 dt$.
4. On note $f\colon x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$. Déterminer $\mathcal{F}(f)$.

__Exercice 6.__

1. Montrer que pour $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ et $g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ on a $\mathcal{F}(f * g) = \hat{f}\mathcal{F}(g)$.
2. Soit $f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$; montrer que $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n}\mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g)$ et $\check{f} * \check{g} = (2\pi)^{-n}\widehat{\mathcal{F}(f)\mathcal{F}(g)}$.

__Exercice 7.__

1. Soit $f \in L^1(\mathbf{R}^n)$ une fonction radiale, c'est-à-dire de la forme $f(x) = g(\|x\|_2)$ avec $g\colon \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ borélienne. Montrer que $\hat{f}$ est radiale.
2. Montrer la même propriété pour la transformée de Fourier sur $L^2(\mathbf{R})$.

Exercice 8. Calculer les transformées de Fourier de $f, g\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définies par $f(x) = e^{-|x|}$ et $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 9. On cherche à résoudre l'équation différentielle suivante : $-y'' + y = e^{-2|x|}$ (E).

1. Montrer que si f est solution de cette équation et f, f' appartiennent à $L^1(\mathbf{R})$ alors pour tout ξ on a

$$\hat{f}(\xi) = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{1+\xi^2} - \frac{1}{4+\xi^2}\right)$$

2. Déterminer toutes les solutions de (E).

Exercice 10. Déterminer les fonctions $f \in L^1(\mathbf{R})$ telles que $\int_{\mathbf{R}} f(x-t)f(t)dt = \frac{1}{x^2+1}$ pour presque tout $x \in \mathbf{R}$.

Exercice 11. Soit $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ défini par $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$. Pour $n \in \mathbf{N}^*$, calculer $\underbrace{f * \ldots * f}_{n \text{ fois}}$.

Exercice 12.

1. En utilisant la transformée de Fourier, montrer qu'il n'existe pas de $g \in L^1(\mathbf{R}^d)$ telle que pour tout $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ on ait $f * g = f$.
2. Déterminer toutes les fonctions $f \in L^1(\mathbf{R}^d)$ telles que $f * f = f$.
3. Résoudre $f * f = f$ dans $L^2(\mathbf{R})$.

Exercice 13. Soit $g \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$. Montrer qu'il existe une unique fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ telle que $f^{(12)} + f^{(8)} + f = g$. Que pensez-vous du cas général d'une équation différentielle $\sum_{i=0}^{n} f^{(i)} = g$?