Licence de Mathématiques 3e année
Approfondissement en analyse
Année 2017-2018

Fiche TD 5

Exercice 1. Déterminer si les matrices suivantes sont des matrices hessiennes d'une fonction $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & x+y \\ x-y & y^2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & xy \\ xy & x^2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 2y^3 & 6xy^2 \\ 6xy^2 & 6x^2y \end{pmatrix}$$

Si oui, trouver toutes les fonctions f associées.

Exercice 2.

a) On considère une fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ continue. Montrer que s'il existe $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tel que $f = \nabla g$, alors

$$(*) \qquad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \qquad \forall\, i, j \in \{1,2,3\}.$$

b) La fonction

$$f(x,y,z) = (xy^2z^2, x^2yz^2, x^2y^2z+1).$$

vérifie-t-elle la condition $(*)$?

c) Déterminer toutes les fonctions $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telles que $f = \nabla g$.

Exercice 3. Vérifier que les fonctions suivantes sont de classe C^2 sur leurs domaines de définition, ensuite déterminer leurs formules de Taylor à l'ordre 2 aux voisinages des points données :

$$\begin{array}{cccc} f & : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & \arctan\left(\dfrac{1+x}{1-y}\right) \\ \text{en } (0,0) & & & \end{array} \; ; \qquad \begin{array}{cccc} g & : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & e^x \sin(x+y) \\ \text{en } (0,\frac{\pi}{2}) & & & \end{array} \; ;$$

$$\begin{array}{cccc} h & : \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & x^y \\ \text{en } (1,0) & & & \end{array} \; .$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^n y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Discuter suivant les valeurs de l'entier positif n, l'appartenance de f aux classes $C^0(\mathbb{R}^2)$, $C^1(\mathbb{R}^2)$ et $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 5. Rechercher les points critiques de $y(x^2 + \ln^2 y)$ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$ et étudier leur nature. Même question sur $\mathbb{R}^3$ pour $z(e^x - 1) - y^2$.

Exercice 6. Chercher les extréma éventuels des fonctions suivantes :

a) $3xy - x^3 - y^3$

b) $-2(x-y)^2 + x^4 + y^4$

c) $x^2y^2(1+3x+2y)$

d) $2x + y - x^4 - y^4$

e) $\dfrac{xy}{(x+y)(1+x)(1+y)}$, $x, y > 0$

f) $\sqrt{x^2+(y-1)^2} + \sqrt{y^2+(x-1)^2}$

Exercice 7. (**Extréma locaux**) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 2$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les extréma locaux de la fonction f.

b) La fonction f possède-t-elle des extréma globaux sur $\mathbb{R}^2$?

c) Représenter le segment de droite L défini par

$$L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -2 \leq x \leq 0,\ y = x+1\}$$

et déterminer les extréma globaux de la restriction de f à L en précisant en quels points de L ils sont atteints.

Exercice 8. (**Extréma sur un compact**) Déterminer la borne supérieure de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x,y) = 3xy - 3x^2 - y^3$$

sur le compact $K = [-1,1] \times [-1,1]$.

Exercice 9. (**Extréma globaux**) On considère la fonction définie pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = xye^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

a) Etudier les extréma relatifs (locaux) de f sur $\mathbb{R}^2$. On pourra utiliser les symétries de la fonction f pour réduire le nombre de cas à étudier.

b) Démontrer que $f(x,y) \to 0$ quand $\|(x,y)\| \to \infty$.

c) Déduire de ce qui précède l'existence des extréma globaux de f sur $\mathbb{R}^2$ et les déterminer.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 + x^2y^2 - x^4 - y^4$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Déterminer les extréma locaux de f.

b) Montrer que $f(x,y) \leq 2r^2 - \dfrac{r^4}{4}$ où $r^2 = x^2 + y^2$. En déduire que $f(x,y) \leq 4$.

c) Trouver le maximum global de f et les points où il est atteint.

d) Y a-t-il un minimum global ?

Exercice 11. On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$. Déterminer les extréma (éventuels) de la fonction f et pour chacun de ces extréma, préciser si c'est un minimum ou un maximum.

Exercice 12. Déterminer les extréma locaux de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$f(x,y) = \sin x \sin y.$$

Pour chacun de ces extréma, préciser si c'est un minimum ou un maximum et calculer le développement limité (la formule de Taylor) à l'ordre 2 au voisinage de chacun des points critiques de f.

Exercice 13.

a) Montrer que -1 est la seule racine négative de l'équation $x = \ln|x| + \dfrac{1}{x}$.

b) Déterminer les extréma locaux de la fonction $g(x,y) = xe^y + ye^x$.