Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre de printemps 201-2018

UE de calcul différentiel et analyse complexe

Feuille d'exercices n° 5 : Courbes paramétrées et séries entières

---

Exercice 1 (Spirale logarithmique ($\star$))**.** On considère la courbe paramétrée par $M(t) = (x(t), y(t)) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$ avec $t \in \mathbb{R}$.

1. Si on désigne par $v(t)$ le vecteur vitesse au point $M(t)$, montrer que l'angle entre $\overrightarrow{OM(t)}$ et $v(t)$ est constant ; le déterminer.
2. Montrer qu'il existe $\lambda > 0$, et le determiner, tel que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la longueur de la courbe pour $t \in]-\infty, t_0]$ est égale à $\lambda \cdot \|\overrightarrow{OM(t_0)}\|$.
3. Déterminer la courbure en un point quelconque.

L'étudiant curieux pourra étudier la spirale logarithmique générale donnée par $(x(t), y(t)) = ab^t(\cos(t), \sin(t))$ où $a, b > 0$ et $b \neq 1$ et refaire l'exercice avec cette définition.

Exercice 2 ($\star$)**.** Montrer que la courbe paramétrée par $x(t) = 3t^3 + 2t^2 - t - 1,\ y(t) = 3t^2 + 2t + 1$ possède un unique point double. Déterminer une équation des tangentes en ce point.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que la courbure au point d'abscisse x est $\dfrac{|f''(x)|}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}$.

Exercice 4. Faire l'étude de la courbe paramétrée $(x(t), y(t)) = (\cos(3t), \sin(2t))$. On remarquera qu'il suffit de faire l'étude pour $t \in [0, \pi/2]$.

Exercice 5 ($\star$)**.** soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1. $\sum a_n z^{3n}$,
2. $\sum a_n 3^n z^{2n}$,
3. On suppose désormais $R > 0$. Montrer que la série entière $\sum \dfrac{a_n}{n!} z^n$ a un rayon de convergence infini.

Exercice 6 ($\star$)**.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

1. $\sum (-1)^n \dfrac{n^n}{n!} z^{4n+1}$,
2. $\sum \dfrac{n!}{1.3\ldots(2n+1)} z^{2n+3}$.
3. $\sum (1 + (-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$.
4. $\sum z^{n!}$,
5. $\sum n^n z^{n^2}$.

Exercice 7 ($\star$)**.** Déterminer le rayon de convergence, R, de $\sum \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$, puis étudier sa convergence pour $|z| = R$.

Exercice 8 ($\star$)**.** Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.
2. Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$ ont le même domaine de convergence.

Exercice 9 ($\star$). Calculer le rayon de convergence des séries entières associées et déterminer la valeur des sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$,
2. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$,
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n$,
4. $\displaystyle\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$
5. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3+(-1)^n)^n} x^n$

Exercice 10 ($\star$). Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 1$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 11. Soit $P_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$ et soir $R > 0$. Montrer que pour n suffisamment grand, P_n n'a pas de racinces dans le disque fermé de rayon R.

Exercice 12. Pour un entier $n \geq 1$, on note $d(n)$ (respect. $s(n)$) le nombre de diviseurs (respect. leur somme) de n qui sont supérieurs à 1. Montrer que les séries entières $\sum d(n) z^n$ et $\sum s(n) z^n$ ont pour rayon de convergence 1.