

---

Feuille d'exercices n° 6 : Séries entières

---

**Exercice 1.** soit  $\sum a_n z^n$  une série entière de rayon de convergence  $R$ . Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

1.  $\sum a_n z^{3n}$ ,

2.  $\sum a_n 3^n z^{2n}$ ,

3. On suppose désormais  $R > 0$ . Montrer que la série entière  $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$  a un rayon de convergence infini.

**Exercice 2.** Déterminer le rayon de convergence des séries entières complexes suivantes :

1.  $\sum (-1)^n \frac{n^n}{n!} z^{4n+1}$ ,

2.  $\sum \frac{n!}{1.3 \dots (2n+1)} z^{2n+3}$ .

4.  $\sum z^{n!}$ ,

3.  $\sum (1 + (-1)^n/n)^{(n^2)} z^n$ .

5.  $\sum n^n z^{n^2}$ .

**Exercice 3.** Déterminer le rayon de convergence,  $R$ , de  $\sum \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) z^n$ , puis étudier sa convergence pour  $|z| = R$ .

**Exercice 4.** Les assertions suivantes sont elles vraies ou fausses ?

1. Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum (-1)^n a_n z^n$  ont le même rayon de convergence.

2. Les séries entières  $\sum a_n z^n$  et  $\sum (-1)^n a_n z^n$  ont le même domaine de convergence.

**Exercice 5.** Calculer le rayon de convergence des séries entières associées et déterminer la valeur des sommes suivantes :

1.  $\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 x^n$ ,

3.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+1} x^n$ ,

5.  $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3 + (-1)^n)^n} x^n$

2.  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$ ,

4.  $\sum_{n=3}^{+\infty} \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} x^n$

**Exercice 6.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  si  $x \neq 0$  et  $f(0) = 1$ . Montrer que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

**Exercice 7.** Soit  $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!} \in \mathbb{C}[X]$  et soit  $R > 0$ . Montrer que pour  $n$  suffisamment grand,  $P_n$  n'a pas de racines dans le disque fermé de rayon  $R$ .

**Exercice 8.** Pour un entier  $n \geq 1$ , on note  $d(n)$  (respect.  $s(n)$ ) le nombre de diviseurs (respect. leur somme) de  $n$  qui sont supérieurs à 1. Montrer que les séries entières  $\sum d(n)z^n$  et  $\sum s(n)z^n$  ont pour rayon de convergence 1.

**Exercice 9.** Soit  $f = \sum_n a_n z^n$  une série entière où  $a_n$  est la suite de Fibonacci définie par  $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$  et  $a_0 = a_1 = 1$ .

1. Montrer que pour  $z$  dans le disque de convergence, on a :

$$f(z) = (z^2 + z)f(z) + 1.$$

2. Montrer que le rayon de convergence de  $f$  est l'inverse du nombre d'or  $\gamma = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

*Indication : considérer  $d_n = a_{n+1}/a_n$  ;  $\gamma$  la racine positive de  $X^2 - X - 1 = 0$  et étudier la suite  $d_n - \gamma$ .*