Feuille d'exercices n° 7 : Distributions, distributions tempérées

Exercice 1. Soit $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R})$ et $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Montrer que $(fu)' = f'u + fu'$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbf{R}^n$ on définit la *masse de Dirac* δ_x par la formule $\delta_x(f) = f(x)$ pour $f \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbf{R})$.

1. Montrer que δ_x est une distribution, et même une distribution tempérée.
2. Déterminer $\partial^\alpha \delta_x$ pour tout multi-indice α.
3. Pour $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbf{R}^n)$, montrer que $f\delta_x = f(x)\delta_x$.
4. Déterminer la transformée de Fourier de δ_x, ainsi que de la fonction constante égale à 1 (vue comme une distribution tempérée).

Exercice 3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \delta_k^{(k)}$ définit-elle une distribution sur $\mathbf{R}$? Une distribution tempérée ?

Exercice 4.

1. Soit $u \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$. Montrer u admet une primitive dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ et décrire l'ensemble des primitives de u dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$.
2. Soit $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$. Montrer u admet une primitive dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ et décrire l'ensemble des primitives de u dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$.
3. Soit H la fonction de Heaviside, définie par $H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

   Calculer H' (au sens des distributions), puis déterminer toutes les primitives de δ_0.
4. Déterminer toutes les primitives de H (on pourra s'intéresser à xH).

Exercice 5. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, admettant un nombre fini de discontinuités $x_1, \ldots, x_n$. On note u_f la distribution associée à f.

Montrer que $(u_f)' = u_{f'} + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i^+) - f(x_i^-)\right) \delta_{x_i}$.

Exercice 6.

1. Soit $f \in L^1_{loc}(\mathbf{R})$. Pour tout $x \in \mathbf{R}$ on pose $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$. Montrer que $g' = f$ au sens des distributions.
2. Soit $f \in L^1(\mathbf{R})$, d'intégrale non nulle. Montrer que l'ensemble des primitives de f (au sens des distributions) est l'ensemble des fonctions de la forme $G * f$, où G est une primitive de δ_0.

Exercice 7. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur $\mathbf{R}$. Pour $x \in \mathbf{R}$ on pose $F_\mu(x) = \mu(]-\infty, x])$.

1. Montrer que F_μ est croissante, continue à droite en tout point, tend vers 0 en $-\infty$ et vers 1 en $+\infty$.
2. Montrer que, au sens des distributions, on a $F'_\mu = \mu$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = e^x \cos(e^x)$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme P tel que $|f(x)| \leqslant |P(x)|$ pour tout $x \in \mathbf{R}$.
2. Montrer que f définit une distribution tempérée.

Exercice 9.

1. Résoudre dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ et dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ les équations différentielles suivantes :
$$u' = 0\,, \quad u' + u = 0\,, \quad u' + u = \delta_0$$
2. Pour $f \in \mathcal{C}(\mathbf{R})$, décrire l'espace des solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ d'une équation de la forme $\sum_{k=0}^{n} a_k u^{(k)} = f$ (avec $a_0, \ldots, a_k \in \mathbf{C}$).

Exercice 10. Calculer la transformée de Fourier, au sens des distributions tempérées, des fonctions suivantes : $x \mapsto e^{ix}$, $x \mapsto \cos x$, $x \mapsto x\sin(x)$, $x \mapsto e^{-|x|}$, $x \mapsto |x|e^{-|x|}$, $x \mapsto \dfrac{\sin(x)}{x}$.

Exercice 11.

1. Rappeler la définition de la valeur principale sur $\mathbf{R}$, et pourquoi c'est une distribution tempérée. On la note $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$.
2. Montrer que $x\mathrm{vp}\dfrac{1}{x} = 1$.
3. Calculer $(x\delta_0)\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ et $(x\mathrm{vp}\dfrac{1}{x})\delta_0$. Qu'en pensez-vous ?
4. Soit $f\colon \mathbf{R}^* \to \mathbf{R}$ définie par $f(x) = \ln(|x|)$. Montrer que f définit une distribution tempérée et calculer f' au sens des distributions.
5. En exploitant l'égalité $x\mathrm{vp}\dfrac{1}{x} = 1$, montrer que $\widehat{\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}} = -2i\pi H + C$, où H est la fonction de Heaviside définie plus haut et C est une constante à déterminer.
6. En exploitant le fait que $\mathrm{vp}\dfrac{1}{x}$ est une distribution impaire, calculer C.
7. En déduire la valeur de $\hat{H}$.

Exercice 12. On suppose que $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R})$ est telle que $u^{(4)} + u$ appartienne à $L^2(\mathbf{R})$.
Démontrer que u, u', u'' et $u^{(3)}$ appartiennent toutes à $L^2(\mathbf{R})$ (on commencera par donner un sens précis à l'énoncé...).

Exercice 13. Trouver toutes les solutions de l'équation $-y''(t) + y(t) = e^{-t^2}$ dans $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ puis dans $\mathcal{C}^2(\mathbf{R})$.

Exercice 14. Soit $u\colon \mathcal{S}(\mathbf{R}^2) \to \mathbf{C}$ l'application linéaire définie par
$$\forall \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^2) \quad u(\varphi) = \int_{\mathbf{R}} \varphi(x, -x)dx$$

1. Montrer que u est une distribution tempérée.
2. Calculer (au sens des distributions) $\dfrac{\partial u}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}$.

Exercice 15. Soit g une fonction positive et localement intégrable sur $\mathbf{R}$ telle que la distribution associée à g, qu'on note u_g, soit tempérée.

1. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbf{R})$ telle que $\psi(x) = 1$ pour tout $x \in [-1, 1]$. Étant donnés deux entiers strictement positifs j, m et $x \in \mathbf{R}$, on pose
$$\varphi_{j,m}(x) = \frac{\psi\left(\frac{x}{j}\right)}{(1 + x^2)^m}$$
Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ ainsi que $m \in \mathbf{N}^*$ tels que $|\langle u_g, \lambda\varphi_{j,m}\rangle| \leqslant 1$ pour tout $j \in \mathbf{N}^*$.
2. Montrer que $x \mapsto \dfrac{g(x)}{(1 + x^2)^m}$ est intégrable.
3. Donner des exemples de fonctions positives et continues sur $\mathbf{R}$ ne définissant pas une distribution tempérée.