
Feuille d'exercices n° 7: Fonctions holomorphes, conditions de Cauchy-Riemann

Terminologie. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ et $z_0 \in \mathbb{C}$. On emploiera de façon équivalente les termes : f est \mathbb{C} -dérivable en z_0 , f est dérivable en z_0 . Comme \mathbb{C} est un \mathbb{R} -espace vectoriel (de dimension 2), on emploiera le terme f est \mathbb{R} -différentiable en z_0 . Ainsi, une fonction est holomorphe en z_0 si et s. si f est \mathbb{R} -différentiable en z_0 et satisfait les conditions de Cauchy-Riemann en z_0 .

Exercice 1. Soient $f, g, h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par $f(z) = \bar{z}$, $g(z) = \operatorname{Re}(z)$ et $h(z) = \operatorname{Im}(z)$. Montrer que ces fonctions ne sont dérivables en aucun point de \mathbb{C} .

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(z) = \frac{z^5}{|z|^4}$ si $z \neq 0$ et $f(0) = 0$. Montrer que f satisfait les conditions de Cauchy-Riemann à l'origine mais que f n'est pas \mathbb{C} -dérivable en ce point.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ donnée par $f(x + iy) = x^3 + iy^3$. En quels points de \mathbb{C} la fonction f est-elle dérivable ?

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction polynomiale associée à un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

1. Montrer que la fonction $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(\bar{z})}$ est dérivable en tout point de \mathbb{C} et pour tout $z \in \mathbb{C}$, exprimer $g'(z)$ en fonction de f .
2. Montrer que la fonction $h : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \overline{f(z)}$ est dérivable en 0 si et s. si $f'(0) = 0$.

Exercice 5. Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto e^{\operatorname{Re}(z)}$ n'est dérivable en aucun point.

Exercice 6. Soit une fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$. On suppose que f est \mathbb{R} -différentiable sur \mathbb{C} et que sa différentielle est continue en tout point. Est-il possible que f ne soit dérivable en aucun point de \mathbb{C} ?
Indication : on pourra chercher un exemple où $f(x + iy)$ est un polynôme de degré 1 en $x, y \in \mathbb{R}$.

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe sur \mathbb{C} . On note \tilde{f} la fonction correspondante de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R}^2 . Montrer que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, la différentielle $D\tilde{f}(x, y)$ est une similitude directe (i.e. composée d'une homothétie et d'une rotation).

Exercice 8. Soit U un ouvert connexe et f une fonction holomorphe sur cet ouvert. Démontrer que chacune des conditions suivantes implique que f est constante.

1. f' est nulle sur U .
2. $\operatorname{Re}(f)$ est constante.
3. $\operatorname{Im}(f)$ est constante.
4. \bar{f} est holomorphe sur U .
5. $|f|$ est constante.

Exercice 9. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction définie sur un ouvert U de \mathbb{C} . On dit que f est anti-holomorphe sur U si la fonction $z \mapsto f(\bar{z})$ est holomorphe sur l'ouvert conjugué \bar{U} .

1. Montrer que f est holomorphe sur U si et s. si \bar{f} est anti-holomorphe sur U .
2. Soit U un ouvert tel que $\bar{U} = U$ et soit g une fonction anti-holomorphe sur U . Montrer qu'il existe deux fonctions holomorphes f_1 et f_2 sur U telles que pour tout $z \in U$, $g(z) = \overline{f_1(z)} = f_2(\bar{z})$.

Exercice 10. Soit f holomorphe sur \mathbb{C} et de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ sont harmoniques. On rappelle qu'une fonction $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 est harmonique si $\sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2} = 0$.

L'étudiant curieux pourra s'intéresser à une forme de réciproque qui dit : Soit U un ouvert étoilé de \mathbb{C} et soit g une fonction harmonique sur U , alors g est la partie réelle d'une fonction holomorphe sur U ; regarder $f = \frac{\partial g}{\partial x} - i \frac{\partial g}{\partial y}$.