TD8

Exercice 1. Soit $\varphi : z \mapsto \frac{1}{z}$. Déterminer $\varphi(\gamma)$ où :
1) γ est le cercle de centre i et de rayon 1.
2) γ est la droite d'équation $2x + 2y - 1 = 0$.

Exercice 2. 1) Déterminer l'image de l'axe réel par l'homographie $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$.
2) En déduire l'image par f du demi-plan $\{z \in \mathbb{C} : Im(z) < 0\}$
3) Déterminer l'image de la bande $B := \{z \in \mathbb{C} : 0 < Im(z) < \pi\}$ par $g(z) = -e^z$.
4) Déduire des questions précédentes une transformation conforme transformant la bande B en le disque unité $D(0,1) := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$.

Exercice 3. Soit $f : z \mapsto \sin(z)$ et $g : z \mapsto \cos(z)$.
1) Trouver l'image par f de la droite d'équation $\{x = \frac{\pi}{2}\}$.
2) Trouver l'image par f du segment $\{-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}, y = 0\}$.
3) Trouver l'image par g du segment $\{0 < x < \pi, y = a\}$ avec $a > 0$.

Exercice 4. Soit γ le chemin qui représente le morceau de parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points d'abscisse 1 et 2. Calculer

$$\int_\gamma \overline{z} dz.$$

Exercice 5. Soit γ le circuit dont le support est le carré de sommets $1 + i$, $1 - i$,$-1 - i$ et $-1 + i$ parcouru une fois dans le sens direct. Calculer

$$\int_\gamma \frac{z-1}{z} dz.$$

Exercice 6. En intégrant $z \mapsto e^z$ le long d'un chemin convenable, montrer que pour tous $(a, b) \in \mathbb{R}^2, a \leqslant b$ et pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $Re(z) \geqslant 0$ on a :

$$e^{bz} - e^{az} \leqslant (b-a)|z|e^{bRe(z)}.$$

Exercice 7. Soit γ le cercle centré en 2 et de rayon 1. Calculer $\int_\gamma \frac{z+1}{z} dz$.

Exercice 8. Soit γ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Calculer :
1) $\int_\gamma e^z dz$.
2) $\int_\gamma \frac{e^z}{z^n} dz$.
3) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z} dz$
4) $\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z} dz$
5) $\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z^2} dz$.

Exercice 9. Soit f une fonction entière telle que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait : $|f(z)| \leqslant \sqrt{|z|}$. Montrer que f est constante.