Feuille d'exercices n°9

Exercice 1 (Lemme de Schwarz.)**.** Soit $D = D(0,1)$ le disque unité ouvert et soit f holomorphe sur D. On suppose que : $f(0) = 0$ et $f(D) \subseteq D$.

1. En considérant $g : z \mapsto \frac{f(z)}{z}$, montrer que $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D$ et $|f'(0)| \leq 1$.
2. On suppose de plus que $|f'(0)| = 1$ ou bien qu'il existe $z_0 \neq 0$ tel que $|f(z_0)| = |z_0|$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| = 1$ et pour tout $z \in D$, $f(z) = \lambda z$.

Exercice 2. Soient $R > 0$, $D = D(0,R)$ (disque ouvert), ∂D sa frontière. Soient Ω un domaine contenant $\overline{D}$ et f une fonction holomorphe sur Ω.

1. Montrer que si $f_{|\partial D}$ est constante alors f est constante sur Ω.
2. On suppose que f est non constante et que $|f|_{|\partial D}$ est constante égale à c.
   (a) Montrer que $c \neq 0$ et que pour tout $z \in D$, $|f(z)| < c$.
   (b) En considérant $g : z \mapsto \frac{1}{f(z)}$, montrer que f a au moins un zéro dans D.

Exercice 3. Soit f une fonction entière telle qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $a\mathrm{Re}(f(z)) + b\mathrm{Im}(f(z)) \leq c$. En considérant l'application $z \mapsto \exp((a - ib)f(z))$, montrer que f est constante.

Exercice 4. Soit f une fonction entière. On cherche à montrer que les deux conditions suivantes sont équivalentes :

(a) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| = 1$, $|f(z)| = 1$.
(b) Il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que $|c| = 1$ et il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = cz^n$.

1. Vérifier l'implication $(b) \Rightarrow (a)$.
2. On suppose la condition (a) satisfaite.
   (a) Soit n l'ordre du zéro de f à l'origine et soit $g : z \mapsto f(z)/z^n$. Vérifier que g est entière.
   (b) Montrer que la fonction h donnée par $h(z) = \overline{g(1/\overline{z})}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, $g(z)h(z) = 1$.
   (c) En déduire qu'il existe une fonction entière k telle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $g(z) = e^{k(z)}$.
   (d) Montrer que h est entière et constante et que la fonction k est constante imaginaire pure. Conclure.

Exercice 5. Soit Ω un domaine de $\mathbb{C}$.

1. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur Ω telles que le produit fg soit nul sur Ω. Montrer que l'une des fonctions est nulle sur Ω.
2. Soit f une fonction holomorphe sur Ω. On suppose qu'il existe deux déterminations de la racine carrée de f, notées g_1 et g_2. Montrer que $g_1 = g_2$ ou $g_1 = -g_2$.

Exercice 6. Étudier l'existence et l'unicité d'une fonction holomorphe f sur un voisinage connexe de 0 telle que :

1. Pour tout $n \geq 1$, $f(1/n) = \frac{1}{2n+1}$.
2. Pour tout $n \geq 1$, $f(1/n) = e^{-n}$.

Exercice 7. Déterminer les zéros de la fonction $z \mapsto 1 - \exp(\frac{z}{z-1})$ dans le disque ouvert $D(0,1)$. Cela contredit-il le principe des zéros isolés ?

Exercice 8. Soient f et g deux fonctions entières telles que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $|f(z)| \leq |g(z)|$.

1. Montrer que tout zéro z_0 de g est un zéro de f et que son ordre comme zéro de f est supérieur ou égal à son ordre comme zéro de g.
2. En déduire que f et g sont proportionnelles.

Exercice 9. On fixe $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. On pose $a = e^{2i\pi t}$ et on note $U = \{z \in \mathbb{C}\ ,\ ,\frac{1}{2} < |z| < \frac{3}{2}\}$. Soit $f : U \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe telle que :

$$\forall z \in U, \quad f(az) = f(z).$$

Enfin, on définit $g : U \to \mathbb{C}$ par $g(z) = zf'(z) - f'(1)$.

1. Calculer $g(a^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que g est nulle sur U.
3. Montrer que f est constante.
4. La conclusion est-elle encore vraie si on prend $t \in \mathbb{Q}$?

Exercice 10. Calculer $I = \int_\gamma f(z)dz$ dans les cas suivants.

1. $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(z) = \frac{5z^2+1}{z(z-1)}$.
2. $\gamma(t) = \frac{3}{2}e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z+2)}$
3. $\gamma(t) = re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$; $f(z) = \frac{\exp(1/z)}{z-1}$.

Exercice 11. Soit P une polynôme et γ un lacet contenant tous les zéros de P dans son intérieur. Calculer $\displaystyle\int_\gamma z\frac{P'(z)}{P(z)}dz$.

Exercice 12. Soit P un polynôme de degré n n'ayant que des racines simples et soit Q un polynôme de degré $\leq n-2$. On considère $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{R \to +\infty} \int_{\gamma_R} \frac{Q(z)}{P(z)}dz$.
2. Soient $z_1, \ldots, z_n$ les racines complexes de P. Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{Q(z_k)}{P'(z_k)}$.