Université Claude Bernard Lyon 1 2016-2017

Licence de Mathématiques, 3ème année
Parcours ≪Mathématiques pour l'enseignement≫
Approfondissement en analyse
Examen terminal
Mardi 9 mai 2017 – Durée : 1h30

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Exercice 1. Soient $a \in \mathbb{R}$ et

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y)) = (x^2 + ay, x - y).$$

a) Montrer qu'il existe une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f = \nabla g$ si et seulement si $a = 1$. Dans le cas où $a = 1$ trouver toutes les fonctions g avec cette propriété.

b) On suppose dans cette question que la fonction f est une fonction de classe C^1 arbitraire. La condition $\dfrac{\partial f_1}{\partial y} = \dfrac{\partial f_2}{\partial x}$ est-elle nécessaire pour avoir l'existence de la fonction g comme au-dessus ? Est-elle suffisante ?

On suppose dans la suite que $a = 1$.

c) Montrer qu'il existe une unique fonction $g_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f = \nabla g_0$ et $g_0(0) = 0$. Déterminer explicitement g_0.

d) Trouver tous les points critiques de la fonction g_0.

e) Trouver les extrema de la fonction g_0. Préciser s'il s'agit d'un minimum ou d'un maximum, global ou seulement local.

f) Dans tous les points critiques de g_0, écrire la formule de Taylor de g_0 à l'ordre 2.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2x^3 - 3xy^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

a) La fonction f est-elle continue en 0 ? Justifiez votre réponse.

b) Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en $(0,0)$, si elles existent.

c) Calculer toutes les dérivées directionnelles de f en $(0,0)$.

d) L'application f est-elle différentiable en $(0,0)$? Justifiez votre réponse.

e) L'application f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifiez votre réponse.

Exercice 3. On considère $E = \mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels et A une partie non vide de $\mathbb{R}$.

a) Montrer que l'application

$$P \mapsto \|P\| = \sup\{|P(x)| \,|\, x \in A\}$$

est une norme sur E si et seulement si l'ensemble A est infini et borné.

On suppose désormais que A est infini et borné. On munit E de la norme $\|P\|$. On définit l'application $T : E \to \mathbb{R}$, $T(P) = P(0)$. Nous allons montrer que T est continue si et seulement si A contient une suite qui tend vers 0.

b) On suppose dans cette question qu'il existe une suite a_n de A telle que $a_n \to 0$. Montrer que l'application T est continue et de norme 1.

c) On suppose maintenant qu'il n'existe pas de suite a_n de A qui tend vers 0.

TSVP

(i) Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $[-\varepsilon, \varepsilon] \cap A = \emptyset$.

(ii) On considère la suite de polynômes $P_n(X) = \left(\frac{M^2 - X^2}{M^2}\right)^n$. Montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $\|P_n\| \to 0$.

(iii) Conclure que T n'est pas continue.