TD 1 – NOMBRES COMPLEXES

Exercice 1 – Nombres complexes et plan complexe

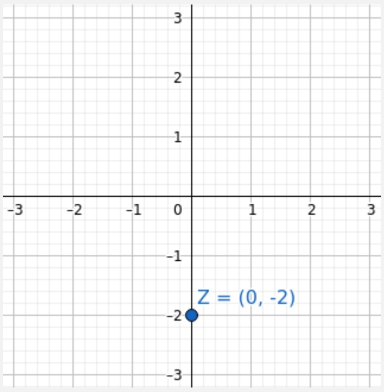
Dessiner les nombres complexes suivants sur le plan complexe :

a) $-2i$ b) $3+2i$ c) $\overline{3+2i}$ d) $5i-1$

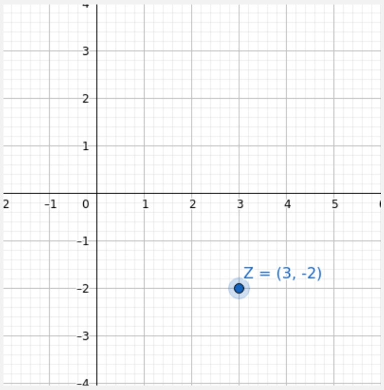
Corrigé

Pour rappel si $z = a + ib$ est la forme cartésienne de z avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors sa représentation graphique est le point (a, b).

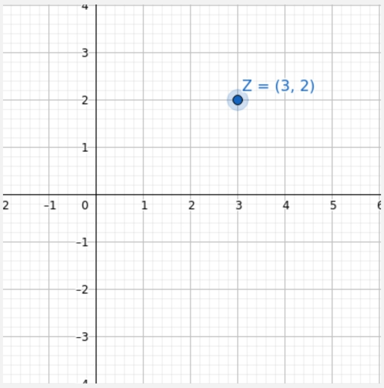
a) $z = -2i$.



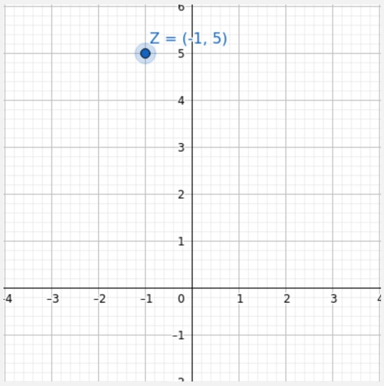
c) $z = \overline{3+2i}$.



b) $z = 3+2i$.



d) $z = 5j - 1$.



Exercice 2 – Opérations entre nombres complexes

Calculer les sommes, produits, quotients, parties réelles et imaginaires suivants :

a) $(3+2i)-(5i-1)$ c) $(3+2i)(5i-1)$ e) $\dfrac{3+2i}{5i-1}$ g) $\operatorname{Re}\big(i(1-i)\big)$

b) $(3+2i)+(\overline{3+2i})$ d) $(3+2i)(\overline{3+2i})$ f) $(3+2i)^2$ h) $\operatorname{Im}\big((1-i)i-3i\big)$

Corrigé

a) On regroupe les parties réelles et les parties imaginaires :
$(3+2i)-(5i-1) = (3+1)+(2i-5i) = 4-3i$

b) On regroupe les parties réelles et les parties imaginaires :
$(3+2i)+(\overline{3+2i}) = (3+2i)+(3-2i) = 6$

c) On effectue le produit usuel et on utilise que $i^2 = -1$:
$(3+2i)(5i-1) = 15i - 3 + 10i^2 - 2i = -13 + 13i$

d) On effectue le produit usuel et on utilise que $i^2 = -1$:
$(3+2i)(\overline{3+2i}) = (3+2i)(3-2i) = 3^2 - (2i)^2 = 9 + 4 = 13$

e) On multiplie par l'expression conjuguée $\frac{\overline{5i-1}}{\overline{5i-1}}$:

$$\frac{3+2i}{5i-1} = \frac{3+2i}{-1+5i} \times \frac{\overline{-1+5i}}{\overline{-1+5i}} = \frac{(3+2i)(-1-5i)}{|-1-5i|^2} = \frac{-3+10-2i-15i}{1+25} = \frac{7}{26} + \frac{-17}{26}i$$

f) $(3+2i)^2 = 3^2 + 12i + (2i)^2 = 5 + 12i$

g) $\mathrm{Re}\big(i(1-i)\big) = \mathrm{Re}(i+1) = 1$

h) $\mathrm{Im}\big((1-i)i - 3i\big) = \mathrm{Im}\big(i + 1 - 3i\big) = -2$

Exercice 3 – Représentation polaire des nombres complexes

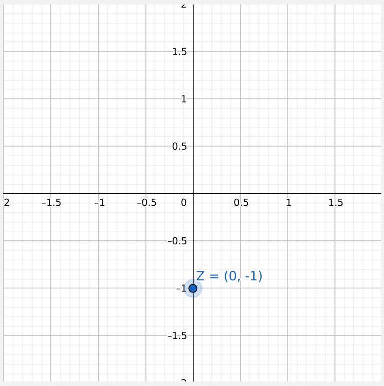
Déterminer le module et un argument des nombres complexes suivants, les écrire sous forme polaire et les dessiner sur le plan complexe :

a) $-i$ b) $3+3i$ c) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^2$ d) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$

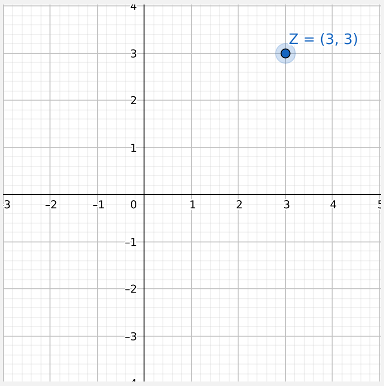
Corrigé

On rappelle qu'un nombre complexe $z = x + iy$ peut s'écrire sous forme polaire $z = \rho e^{i\theta}$ où $\rho = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ est le module de z et θ, un argument de z, vérifie, lorsque $z \neq 0$, $\cos\theta = \frac{x}{\rho}$, $\sin\theta = \frac{y}{\rho}$.

a) $z = -i$. $\rho = 1$, $\theta = -\frac{\pi}{2}$. $z = e^{-i\frac{\pi}{2}}$.



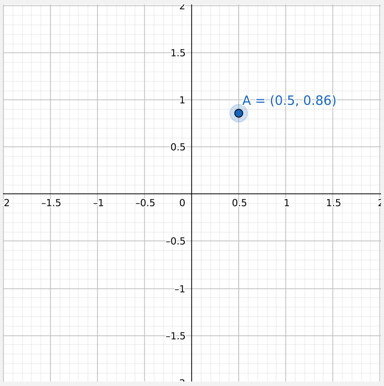
b) $z = 3+3i$. $\rho = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}$, $\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \frac{\pi}{4}$. $z = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$.



c) $z = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}+i}\right)^2$. Écriture de z sous forme cartésienne :

$$z = \frac{1-3+2\sqrt{3}i}{3-1+2\sqrt{3}i} = \frac{-1+\sqrt{3}i}{1+\sqrt{3}i} = \frac{(-1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)}{(1+\sqrt{3}i)(1-\sqrt{3}i)} = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)$$

D'où $\rho = 1$, $\cos\theta = \frac{1}{2}$, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{3}$. $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$.



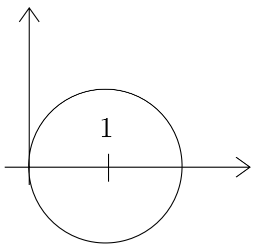
d) $z = \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$. Ici on a

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)^2}{2} = i$$

D'où $z = i^3 = -i$ et on retrouve a).

Exercice 4 – Représentation graphique des nombres complexes

1. Quelle équation vérifient les nombres complexes z formant le cercle représenté ci-dessous dans le plan cartésien ?



2. Dans le plan cartésien, soit $a = 3i$ et $b = 2 - i$ et D la droite médiatrice du segment $[ab]$. Représenter a, b et D. Quelle équation les nombres complexes z formant la droite D satisfont-ils ?
3. Déterminer l'ensemble des nombres complexes suivants et les représenter dans le plan cartésien :

   a) $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| \leqslant 1\}$

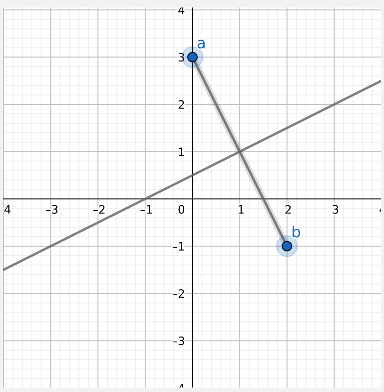
   b) $B = \{z \in \mathbb{C} \mid |2z - 4i + 1| = 4\}$

   c) $C = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - 3i| = |z - 2 + i|\}$

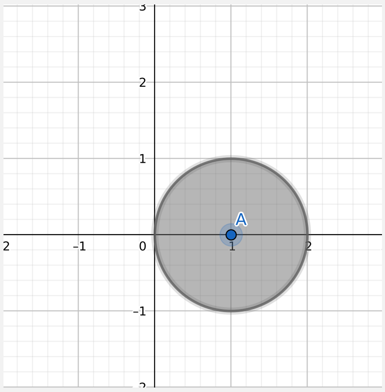
Corrigé

On rappelle que si z et a sont deux nombres complexes, le module $|z-a|$ est la distance de z à a.

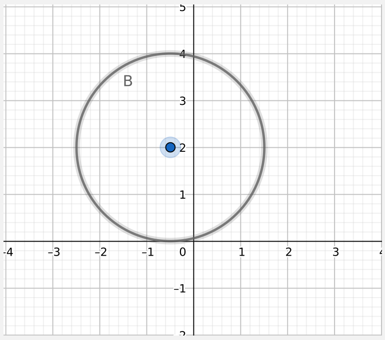
1. Le cercle de centre 1 et de rayon 1 est l'ensemble $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = 1\}$.
2. La médiatrice du segment $[ab]$ est l'ensemble des points à égale distance de a et de b, c'est donc l'ensemble des points z vérifiant $|z-a| = |z-b|$. C'est-à-dire $D = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-3i| = |z-2+i|\}$.



3. a) L'ensemble A est le disque de rayon 1 et de centre $(1, 0)$.



b) Puisque $|2z - 4i + 1| = 4$ si et seulement $|z - (2i - \frac{1}{2})| = 2$, B est le cercle de rayon 2 et de centre $(-1/2, 2)$.



c) C est l'ensemble D du 2., c'est-à-dire la médiatrice du segment $[3i, 2 - i]$.

Exercice 5 – Racines deuxièmes de nombres complexes

Déterminer les racines deuxièmes des nombres complexes suivants et les dessiner sur le plan complexe :

a) 9 b) -1 c) i d) $1 + i$ e) $8 - 6i$

Corrigé

a) $z = 9$. Les racines carrés sont : $+\sqrt{9}$ et $-\sqrt{9}$ et donc $z_1 = 3$ et $z_2 = -3$.

b) $z = -1$; $z_1 = i$, $z_2 = -i$.

c) $z = i$. On peut utiliser ici la forme polaire. On a $z = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et donc si on pose $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $z_1 = -e^{i\frac{\pi}{4}}$, on vérifie bien que $z_1^2 = z_2^2 = z$. Donc $z_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$ et $z_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$.

d) $1 + i$. L'utilisation de la forme polaire fonctionne également ici mais on va utiliser la forme cartésienne. On pose $u = x + iy$ avec $u^2 = z$. Alors :

$$u^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{2} & (1) \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(z) = 1 & (2) \\ 2xy = \mathrm{Im}(z) = 1 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) donne $2x^2 = 1 + \sqrt{2}$ et donc $x = \pm\sqrt{\frac{1+\sqrt{2}}{2}}$.

(1) − (2) donne $2y^2 = \sqrt{2} - 1$ et donc $y = \pm\sqrt{\frac{-1+\sqrt{2}}{2}}$.

(3) montre que x et y sont de même signe et donc

$$z_1 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} + \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}}i, \quad z_2 = -\sqrt{\frac{1 + \sqrt{2}}{2}} - \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{2}}{2}}i.$$

e) $z = 8 - 6i$. On va utiliser la forme cartésienne. On pose $u = x + iy$ avec $u^2 = z$. Alors :

$$u^2 = z \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |z| = \sqrt{64 + 36} = 10 & (1) \\ x^2 - y^2 = \text{Re}(z) = 8 & (2) \\ 2xy = \text{Im}(z) = -6 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) donne $2x^2 = 18$ et donc $x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$.
(1) − (2) donne $2y^2 = 2$ et donc $y = \pm 1$.
(3) montre que x et y sont de signe différents et donc $z_1 = 3 - i, \;\; z_2 = -3 + i$.

Exercice 6 – Équations complexes

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 + z + 1 = 0$
b) $z^2 + z - 1 = 0$
c) $z^3 = -8i$
d) $z^4 - z = 0$
e) $z^4 + 1 = 0$
f) $27(z-1)^3 + (z+1)^3 = 0$

Corrigé

voir les notes en fin du document

Exercice 7 – Factorisation de polynômes en produit de polynômes irréductibles

Trouver les racines (réelles et complexes) de chaque polynôme ci-dessous. Le factoriser en produit de polynômes complexes de degré 1 au plus, puis en produit de polynômes réels de degré 2 au plus.

a) $z^2 - 3z + 2$
b) $z^2 + 1$
c) $z^2 + 3z + 3$
d) $z^3 + 1$
e) $z^3 - 3z + 2$
f) $z^3 - 10z^2 + 27z - 18$

Corrigé

a) $P(z) = z^2 - 3z + 2$. Le discriminant $\Delta = 9 - 4 \times 2 = 1 > 0$ et donc P possède deux racines réelles $z_1 = 1$ et $z_2 = 2$. D'où $P(z) = (z-1)(z-2)$.

b) $P(z) = z^2 + 1$. Le discriminant est négatif et donc P ne possède pas de racine réelle. On voit que

$$P(z) = z^2 + 1 = z^2 - i^2 = (z - i)(z + i)$$

et donc les racines complexes sont i et $-i$. En particulier la décomposition précédente est la décomposition en facteurs irréductibles recherchée sur $\mathbb{C}$.

c) $P(z) = z^2 + 3z + 3$. Le discriminant $\Delta = -3$ et donc P ne possède pas de racine réelle. Les racines carrées de Δ sont $\delta_1 = \sqrt{3}i$ et $\delta_2 = -\sqrt{3}i$. Donc les racines de P sont

$$z_1 = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2}, \;\; z_2 = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{2}$$

et la factorisation sur $\mathbb{C}$ est $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)$.

d) $P(z) = z^3 + 1$. On remarque que -1 est une racine réelle. Donc $P(z)$ est divisible par $(z+1)$. On cherche a, b tels que $P(z) = (z+1)(z^2 + az + b)$. On a

$$(z+1)(z^2 + az + b) = z^3 + (a+1)z^2 + (b+a)z + b$$

et par identification on a $a + 1 = 0, a + b = 0, b = 1$. Donc $a = -1$ et $b = 1$ et

$$P(z) = (z+1)(z^2 - z + 1).$$

Le polynôme $z^2 - z + 1$ n'a pas de racine réelle et en calculant ses racines complexes on trouve

$$z^2 - z + 1 = (z - \frac{1 - \sqrt{3}i}{2})(z - \frac{1 + \sqrt{3}i}{2})$$

et enfin

$$P(z) = (z+1)(z - \frac{1-\sqrt{3}i}{2})(z - \frac{1+\sqrt{3}i}{2})$$

e) $P(z) = z^3 - 3z + 2$. On remarque que 1 est une racine réelle. En procédant comme dans le cas précédent, on trouve

$$P(z) = (z-1)(z^2 + z - 2).$$

Les racines du dernier polynôme sont 1 et -2 et donc

$$P(z) = (z-1)^2(z+2).$$

f) $P(z) = z^3 - 10z^2 + 27z - 18$. On voit que 1 est une racine évidente et en procédant comme dans les cas précédents, on trouve

$$P(z) = (z-1)(z-3)(z-6).$$

g) $P(z) = z^4 + 1$. On a

$$\begin{aligned} z^4 + 1 &= z^4 - i^2 = (z^2 - i)(z^2 + i) \\ &= (z - \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z + \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i))(z - \frac{i}{\sqrt{2}}(1+i))(z + \frac{i}{\sqrt{2}}(1+i)). \end{aligned}$$

Exercice 8 – Application à la physique

En électricité, on utilise les nombres complexes pour décrire le comportement des composants du type résistances, condensateurs, bobines etc. La lettre i étant réservée à l'intensité électrique dans ce contexte, on utilise la lettre j pour désigner le nombre complexe de coordonnées cartésiennes $x = 0$ et $y = 1$. On donne : $Z_1 = a$ (résistance) ; $Z_2 = -j \times b$ (condensateur parfait) ; $Z_3 = c + j \times b$ (bobine résistive), a, b et $c \in \mathbb{R}$. Trouvez les impédances équivalentes complexes suivantes :

1) $Z_4 = Z_1 + Z_2$; (Z_1 en série avec Z_2)
2) $Z_5 = \frac{Z_1 \times Z_2}{Z_1 + Z_2}$; (Z_1 en dérivation avec Z_2)
3) $Z_6 = Z_1 + \frac{Z_2 \times Z_3}{Z_2 + Z_3}$; (Z_1 en série avec Z_2 et Z_3 en dérivation)

Trouvez la partie résistive (partie réelle), qui permet de dissiper de la chaleur par effet joule, ainsi que la partie réactive (inexploitable à l'extérieure du circuit, partie imaginaire) de ces 3 composants :

4) R_4=Re[Z_4] ; X_4=Im[Z_4]
5) R_5=Re[Z_5] ; X_5=Im[Z_5]
6) R_6=Re[Z_6] ; X_6=Im[Z_6]

Trouvez maintenant le déphasage de la tension par rapport au courant, induit par ces trois composants :

7) Φ_1=Arg[Z_1]
8) Φ_2=Arg[Z_2]
9) Φ_3=Arg[Z_3]

Trouvez l'expression polaire (sous forme exponentielle) de Z_1 à Z_6. Dans le cas particulier où $a = 2$ et $b = 1$, représenter dans le plan cartésien les vecteurs de Fresnel associés $\overrightarrow{OZ_1}$, $\overrightarrow{OZ_2}$ et $\overrightarrow{OZ_4}$. Que remarque-t-on ?

Corrigé

Exercice 9 – Équations complexes [Facultatif]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 = 7 + 24i$

b) $z^2 - 4\sqrt{2}z + 6i = 0$

c) $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$

d) $z^3 = -8i$

e) $z^5 - z = 0$

f) $z^5 + 1 = 0$

g) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$

h) $z^6 - (3+2i)z^3 + 2 + 2i = 0$

Corrigé

a) $z^2 = 7 + 24i$. On pose $z = x + iy$ et $v = 7 + 24i$. Alors :

$$z^2 = v \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |v| = \sqrt{49 + 576} = \sqrt{625} = 25 & (1) \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(v) = 7 & (2) \\ 2xy = \mathrm{Im}(v) = 24 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) donne $2x^2 = 32$ et donc $x = \pm 4$.
(1) − (2) donne $2y^2 = 18$ et donc $y = \pm 3$.
(3) montre que x et y ont le même signe et donc $z_1 = 4 + 3i,\ \ z_2 = -4 - 3i$.

b) $z^2 - 4\sqrt{2}z + 6i = 0$. On calcule le discriminant

$$\Delta = (-4\sqrt{2})^2 - 4 \times 6i = 4(8 - 6i).$$

On calcule les racinées deuxièmes de Δ qui sont (déjà calculées dans un précédent exercice) :

$$\delta_1 = 2(3 - i),\ \delta_2 = 2(-3 - i).$$

On choisit par exemple δ_1 pour calculer les racines de l'équation :

$$z_1 = \frac{-b - \delta_1}{2a} = \frac{4\sqrt{2} - 2(3-i)}{2} = (2\sqrt{2} - 3) + i, z_2 = \frac{-b + \delta_1}{2a} = \frac{4\sqrt{2} + 2(3-i)}{2} = (2\sqrt{2} + 3) - i.$$

c) $iz^2 + (1-5i)z + 6i - 2 = 0$. On calcule le discriminant

$$\Delta = (1 - 5i)^2 - 4i(6i - 2) = -2i.$$

On calcule les racines deuxièmes de Δ ; on pose $\delta = x + iy$ avec $\delta^2 = \Delta$. On a

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |\Delta| = \sqrt{4} = 2 & (1) \\ x^2 - y^2 = \mathrm{Re}(\Delta) = 0 & (2) \\ 2xy = \mathrm{Im}(\Delta) = -2 & (3) \end{cases}$$

(1) + (2) donne $2x^2 = 2$ et donc $x = \pm 1$.
(1) − (2) donne $2y^2 = 2$ et donc $y = \pm 1$.
(3) montre que x et y sont de signe différents et donc $\delta_1 = 1 - i,\ \ \delta_2 = -1 + i$.
On choisit par exemple δ_1 pour calculer les racines de l'équation :

$$z_1 = \frac{-b - \delta_1}{2a} = \frac{-1 + 5i - (1 - i)}{2i} = \frac{-1 + 3i}{i} = i + 3,$$

$$z_2 = \frac{-b + \delta_1}{2a} = \frac{-1 + 5i + (1 - i)}{2i} = 2.$$

d) $z^3 = -8i$. On a $-8i = i^2 8i = 8i^3 = (2i)^3$ et donc $z_0 = 2i$ est une racine 3-ième particulière de $-8i$. Par conséquent l'ensemble des solutions (racines 3-ièmes de $-8i$) est

$$z_k = 2ie^{\frac{2k\pi}{3}i},\ \ k \in \{0, 1, 2\}.$$

e) $z^5 - z = 0$. On a $z^5 - z = 0 \Leftrightarrow z(z^4 - 1) = 0 \Leftrightarrow z = 0$ ou $z^4 = 1$. D'où l'ensemble des solutions

$$0,\ \ z_k = e^{\frac{2k\pi}{4}i},\ \ k \in \{0, 1, 2, 3\}.$$

f) $z^5+1=0$. On a $z^5+1=0 \Leftrightarrow z^5=-1 \Leftrightarrow z^5=(-1)^5$. On voit que -1 est une racine 5-ième particulière de -1. Par conséquent l'ensemble des solutions (racines 5-ièmes de -1) est

$$z_k = -e^{\frac{2k\pi}{5}i}, \quad k \in \{0,1,2,3,4\}.$$

g) $27(z-1)^6+(z+1)^6=0$. On a (comme -1 n'est pas une solution on peut diviser par $z+1$)

$$27(z-1)^6+(z+1)^6=0 \Leftrightarrow (\sqrt{3})^6(z-1)^6 = i^6(z+1)^6 \Leftrightarrow (\sqrt{3}(z-1))^6 = (i(z+1))^6$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}(z-1)}{i(z+1)}\right)^6 = 1.$$

D'où

$$\frac{\sqrt{3}(z-1)}{i(z+1)} = \xi_k, \quad \text{où } \xi_k = e^{\frac{2k\pi}{6}},\ k \in \{0,1,\cdots,5\}.$$

On a

$$\frac{\sqrt{3}(z-1)}{i(z+1)} = \xi_k \Leftrightarrow \sqrt{3}(z-1) = i\xi_k(z+1) \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{3}+i\xi_k}{\sqrt{3}-i\xi_k}$$

et les solutions sont donc

$$z_k = \frac{\sqrt{3}+i\xi_k}{\sqrt{3}-i\xi_k},\ \text{où } \xi_k = e^{\frac{2k\pi}{6}},\ k \in \{0,1,\cdots,5\}.$$

Exercice 10 – Factorisation de polynômes en produit de polynômes irréductibles [Facultatif]
Trouver les racines (réelles et complexes) du polynôme z^4+1. Le factoriser en produit de polynômes complexes de degré 1 au plus, puis en produit de polynômes réels de degré 2 au plus.

Corrigé

Exo 6 : b] $z^2 - 4\sqrt{2}z + 6i = 0$ (1)

i) $\Delta = 32 - 24i$

ii) On cherche $(a+ib)^2 = 32 - 24i$

soit $\begin{cases} a^2 - b^2 = 32 \\ 2ab = -24 \\ a^2 + b^2 = \sqrt{32^2 + 24^2} = 40 \end{cases}$ d'où $2a^2 = 72$ $\Rightarrow a = \pm 6$

si $a = 6$, on a $b = -2$

Les racines secondes de Δ sont donc $6-2i$ et $-6+2i$

iii) Les solutions de (1) sont donc

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{4\sqrt{2} + 6 - 2i}{2} = (2\sqrt{2}+3) - i \\ z_2 = \dfrac{4\sqrt{2} - 6 + 2i}{2} = (2\sqrt{2}-3) + i \end{cases}$$

---

f] $z^5 + 1 = 0 \iff z^5 = -1$ On cherche donc les racines cinquièmes de -1 sous forme trigonométrique soit

$(\rho e^{i\theta})^5 = -1 = e^{i\pi}$ d'où $\begin{cases} \rho^5 = 1 \\ 5\theta = \pi \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{5} \left[\frac{2\pi}{5}\right] \end{cases}$

On a donc les 5 sol $z_k = e^{i(2k+1)\frac{\pi}{5}}$ pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$

Exo 6 : g) $27(z-1)^6 + (z+1)^6 = 0$ (1)

On a un polynôme de degré 6 et donc l'équation (1) a 6 solutions

Il ne faut surtout pas développer !

(1) $\Leftrightarrow$ $27(z-1)^6 = -(z+1)^6 \Leftrightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^6 = -27$ pour $\underline{z \neq 1}$

On va alors décaler à un problème plus simple...

on pose $t = \frac{z+1}{z-1}$ (2) (un changement de variables)

On a alors $t^6 = -27$ (3) (racine 6^{eme} de -27)

soit $\rho^6 e^{i6\theta} = 27 e^{i\pi}$ d'où $\begin{cases} \rho^6 = 27 \\ 6\theta = \pi \ [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho = \sqrt{3} \\ \theta = \frac{\pi}{6} \ \left[\frac{2\pi}{6}\right] \end{cases}$

L'équation (3) a donc 6 solutions

$$t_k = \sqrt{3}\, e^{i(2k+1)\frac{\pi}{6}} \quad \text{pour } k \in \{0...5\}$$

Si $t = \frac{z+1}{z-1} \Leftrightarrow tz - t = z+1 \Leftrightarrow (t-1)z = t+1 \Leftrightarrow z = \frac{t+1}{t-1}$

(pour z et t différents de 1).

L'équation (1) a donc bien 6 solutions :

$$z_k = \frac{t_k+1}{t_k-1} = \frac{\sqrt{3}\, e^{i(2k+1)\frac{\pi}{6}} + 1}{\sqrt{3}\, e^{i(2k+1)\frac{\pi}{6}} - 1} \quad \text{pour } k \in \{0...5\}$$

On doit passer en forme algébrique si on veut simplifier l'écriture.

Par exemple : $z_0 = \dfrac{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1 + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 1 + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\sqrt{3}} = \dfrac{(5/2 + i\,\sqrt{3}/2)}{(1/2 + i\,\sqrt{3}/2)} \dfrac{(1/2 - i\frac{\sqrt{3}}{2})}{(1/2 - i\frac{\sqrt{3}}{2})}$

$$= \frac{2 - \sqrt{3}i}{1} = 2 - \sqrt{3}i$$

Exo 7 : b) $P = z^2+1$ a 2 racines i et $-i$

donc dans $\mathbb{C}$ $z^2+1 = (z-i)(z+i)$

Dans $\mathbb{R}$ il est irréductible

---

f) $P = z^3 - 10z^2 + 27z - 18$ a 1 comme racine evidente

d'où $P = (z-1)(z^2-9z+18)$ $\Delta = 81 - 72 = 9$

donc $z^2-9z+18=0$ a 2 solutions $\begin{cases} z_1 = \frac{9-3}{2} = 3 \\ z_2 = \frac{9+3}{2} = 6 \end{cases}$

Ainsi $P = (z-1)(z-3)(z-6)$ dans $\mathbb{C}$, comme dans $\mathbb{R}$

---

g) $P = z^4+1$ $z^4+1 = 0 \iff z^4 = -1$

d'où $\rho^4 e^{i4\theta} = e^{i\pi} \iff \begin{cases} \rho^4 = 1 \\ 4\theta = \pi \ [2\pi] \end{cases} \iff \begin{cases} \rho = 1 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \ [\frac{2\pi}{4}] \end{cases}$

P a donc 4 racines $z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ $z_2 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$ $z_3 = e^{i\frac{5\pi}{4}}$ $z_4 = e^{i\frac{7\pi}{4}}$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $= -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $= -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ $= \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$

donc dans $\mathbb{C}$, $P = z^4+1 = \left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z + \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(z - \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Pour l'avoir dans $\mathbb{R}$, on multiplie les polynômes de degré 1 dont les racines sont conjuguées (z_1 avec z_4, et z_2 avec z_3)

Soit dans $\mathbb{R}$, $P = (z^2 - \sqrt{2}z + 1)(z^2 + \sqrt{2}z + 1)$