Mesure et intégration
CC du 12/11/2024
Corrigé

Exercice 1 :

a) Une tribu est stable par union dénombrable, donc les ensembles a.p.d. sont dans $\mathcal{M}_{\mathcal{A}}$ (tribu engendrée par $\mathcal{A}$). De même, les complémentaires des ensembles a.p.d $\in \mathcal{M}_{\mathcal{A}}$. Nous allons montrer que

$$\mathcal{M}_{\mathcal{A}} = \mathcal{N} := \{ A \subset \mathbb{R} \ ; \ A \text{ a.p.d ou } A^c \text{ a.p.d} \}$$

"$\supset$" déjà fait.

"$\subset$" $\mathcal{A} \subset \mathcal{N}$ donc il suffit de montrer que $\mathcal{N}$ est tribu.

Si $A \in \mathcal{N} \Rightarrow A^c \in \mathcal{N}$: évident.

Soit $(A_n)_n \in \mathcal{N}$. On montre que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{N}$.

Si tous les A_n sont a.p.d. alors $\bigcup_n A_n$ est a.p.d. car union dénombrable de dénombrables est dénombrable.

Si $\exists A_{n_0}$ t.q. $A_{n_0}^c$ a.p.d alors

$$\left(\bigcup_n A_n\right)^c \subset A_{n_0}^c \overset{\text{a.p.d.}}{\Longrightarrow} \left(\bigcup_n A_n\right)^c \text{ a.p.d.}$$

$$\Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{N}$$

$\mathcal{N}$ est bien une tribu.

b) Soit $A = g^{-1}(\mathbb{Q})$.

$\mathbb{Q}$ est dénombrable dans $\mathbb{R}$ donc borélienne. Comme g est mesurable, on conclut que A est mesurable donc χ_A et χ_{A^c} sont mesurables. On peut écrire

$$h = f^2 \chi_A + \sqrt{|f|}\, \chi_{A^c}$$

$f^2 \chi_A$ est mesurable comme produit de fonct. mes.

$\sqrt{|f|} = \sqrt{\ } \circ |\ | \circ f$ est mes. comme composition de fonct. mes.

($\sqrt{\ }$ et $|\ |$ sont mes car continues).

Donc $\sqrt{|f|}\, \chi_{A^c}$ mes comme produit de fonct. mes

On a bien h mes (somme de fonct. mes).

Exercice 2 :

a) A borélien, $[-t,t]$ borélien $\Rightarrow$ $A \cap [-t,t]$ borélien $\Rightarrow$ $\mu(A \cap [-t,t])$ existe et $\in \overline{\mathbb{R}_+}$. C'est aussi fini car $\mu(A \cap [-t,t]) \leq \mu([-t,t]) < \infty$.

Donc $f_A(t)$ est bien défini et $\in \mathbb{R}_+$.

③

$$f_A(0) = \mu(A \cap \{0\}) = \begin{cases} \mu(\{0\}) & \text{si } 0 \in A \\ \mu(\emptyset) & \text{sinon} \end{cases}$$
$$= 0$$

b) Si $A = \mathbb{Q}$ on écrit
$$f_{\mathbb{Q}}(t) = \mu(\mathbb{Q} \cap [-t,t]) \leq \mu(\mathbb{Q})$$
Soit $(q_n)_n$ une énumération de $\mathbb{Q}$. Alors
$$\mu(\mathbb{Q}) = \mu\left(\bigcup_n \{q_n\}\right) = \sum_n \mu(\{q_n\}) = \sum_n 0 = 0$$
Donc $f_{\mathbb{Q}} \equiv 0$.

c) Soit $t_n \in \mathbb{R}_+$, $t_n \to t$, (t_n) strictement monotone.
On remarque que $\mu(A \cap [-t_n, t_n]) \leq \mu([-t_n, t_n]) < \infty$

La suite d'ensembles $A_n = A \cap [-t_n, t_n]$
est monotone et de mesure finie. Par le cours, les mesures passent à la limite sur des suites monotones d'ensembles de mesure finie. En notant
$B = \bigcup_n A_n$ (si $A_n \subset A_{n+1}$ $\forall n$) ou
$B = \bigcap_n A_n$ (si $A_n \supset A_{n+1}$ $\forall n$) il vient que
$$f_A(t_n) = \mu(A \cap [-t_n, t_n]) = \mu(A_n) \xrightarrow{n \to \infty} \mu(B)$$
Si t_n croissante alors $\bigcup_n [-t_n, t_n] =]-t, t[$

$\Rightarrow B = A \cap]-t, t[\Rightarrow \mu(B) = \mu(A \cap]-t, t[)$

$= \mu(A \cap [-t, t])$

car $\mu(\{t\}) = \mu(\{-t\}) = 0$

Donc $f_A(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} \mu(A \cap [-t, t]) = f_A(t)$.

Si t_n décroissante, alors $\bigcap_n [-t_n, t_n] = [-t, t]$

donc $B = A \cap [-t, t] \Rightarrow \mu(B) = f_A(t)$.

Dans les deux cas, $f_A(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} f_A(t)$.

f_A est bien continue.

d) $f_A(n) = \mu(A \cap [-n, n]) \xrightarrow{n\to\infty} \mu(A)$

(comme au-dessus)

f_A cont donc, par le th. des valeurs intermédiaires $f_A(\mathbb{R}_+)$ contient l'intervalle $]0, \mu(A)[$ (on utilise aussi que $f_A(0) = 0$). Si $S \in]0, \mu(A)[$ il existe donc $t \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_A(t) = S$.

$B = A \cap [-t, t]$ convient.

Exercice 3 :

f_n est Lebesgue intégrable car continue sur un intervalle fermé borné.

La majoration $|\sin t| \leq |t| \quad \forall t \in \mathbb{R}$ implique

$$|f_n(x)| \leq \frac{n}{1+x^2}\frac{x}{n} = \frac{x}{1+x^2}$$

La fonction $\frac{x}{1+x^2} \in \mathcal{L}^1([0,1])$ est indép. de n, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue pour écrire

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n = \int_0^1 \lim_{n\to\infty} f_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}$$

(si la limite existe)

$$= \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\ln 2.$$

Remarque : l'intégrabilité de f_n résulte aussi de la domination utilisée dans le TCVDL $\left(|f_n| \leq \frac{x}{1+x^2}\right)$