Université Claude Bernard - Lyon 1 — Semestre d'automne 2024-2025

Mesure et Intégration — Durée : 90 min

Contrôle continu

La justification des réponses et un soin particulier de la présentation sont demandés et pris en compte lors de la notation.

Question de cours.

a) Donner la définition d'une tribu $\mathscr{M}$.

b) Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable et $a \in X$. Montrer que l'application δ_a définie sur $\mathscr{M}$ par

$$\delta_a(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in A \\ 0 & \text{si } a \notin A \end{cases}$$

est une mesure sur $\mathscr{M}$.

Exercice 1. Les deux parties de l'exercice sont indépendantes.

a) Soit $X = \mathbb{R}$. On considère

$$\mathscr{A} := \big\{\{x\},\ x \in \mathbb{R}\big\} \subset \mathscr{P}(\mathbb{R}).$$

Déterminer la tribu engendrée par $\mathscr{A}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables.

Soit $h : X \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(x) = \begin{cases} f^2(x) & \text{si} \quad g(x) \in \mathbb{Q} \\ \sqrt{|f(x)|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que h est mesurable.

Exercice 2. Soit μ une mesure borélienne sur $(\mathbb{R}, \mathscr{B}(\mathbb{R}))$ vérifiant les conditions suivantes :

— μ est continue : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mu(\{x\}) = 0$;

— la mesure d'un intervalle compact est finie : $\forall a,\ b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, $\mu([a, b]) < +\infty$.

Soit $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$. On définit

$$f_A : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+, \qquad f_A(t) = \mu\big(A \cap [-t, t]\big).$$

a) Justifier que la fonction f_A est bien définie et trouver la valeur de $f_A(0)$.

b) Calculer f_A pour $A = \mathbb{Q}$.

c) Montrer que f_A est continue.
(On pourra utiliser sans preuve la caractérisation de la continuité par suites monotones : f_A est continue en un point t si et seulement si pour toute suite monotone $(t_n)_n$ qui tend vers t nous avons que $(f_A(t_n))_n$ tend vers $f_A(t)$.)

d) En déduire que, si $\mu(A) > 0$, alors pour tout $s \in]0, \mu(A)[$, il existe un borélien $B \subset A$ tel que $\mu(B) = s$.

Exercice 3. On munit $[0,1]$ de la tribu de Borel et de la mesure de Lebesgue. Pour tout entier $n \geq 1$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in [0,1], \quad f_n(x) = \frac{n}{1+x^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right).$$

Justifier que pour tout entier $n \geq 1$, la fonction f_n est intégrable au sens de Lebesgue et déterminer la limite $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x$.