Fiche 0
OPÉRATION SUR LES ENSEMBLES

Cadre, notations

1. Nous travaillons dans un ensemble fixé X.
2. Les parties (sous-ensembles) de X sont notées A, B, etc. La phrase « A est une partie de X » peut s'écrire $A \subset X$ ou $X \supset A$.
3. L'ensemble de toutes les parties de X est noté $\mathscr{P}(X)$.
4. La notation $(A_i)_{i\in I}$ désigne une famille de parties de X, indexée par un ensemble *quelconque* (donc pas nécessairement fini ou dénombrable) d'*indices*.
5. Rappelons les opérations usuelles avec les ensembles :
   (i) (union) $A \cup B := \{x \in X\ ;\ x \in A \text{ ou } x \in B\}$;
   (ii) (intersection) $A \cap B := \{x \in X\ ;\ x \in A \text{ et } x \in B\}$;
   (iii) (différence) $A\backslash B := \{x \in X\ ;\ x \in A \text{ et } x \notin B\}$;
   (iv) (différence symétrique)
   $$A\triangle B := (A\backslash B) \cup (B\backslash A) = \{x \in X\ ;\ [x \in A \text{ et } x \notin B] \text{ ou } [x \in B \text{ et } x \notin A]\}\ ;$$
   (v) (complémentaire) $A^c = X\backslash A := \{x \in X\ ;\ x \notin A\}$;
   (vi) (produit cartésien) si X, Y sont des ensembles, alors $X \times Y := \{(x, y)\ ;\ x \in X \text{ et } y \in Y\}$.
6. Une suite $(A_n)_{n\geq k}$ de parties de X est *croissante* si $A_n \subset A_{n+1}$, $\forall\, n \geq k$. Elle est *décroissante* si $A_n \supset A_{n+1}$ pour tout $n \geq k$.

Exercice 1. (Échauffement)

a) Dessiner « avec des patates » les ensembles $A \cup B$, $A \cap B$, $A\backslash B$, A^c, $A\triangle B$.

b) Calculer $(A\triangle B)\triangle A$.

Exercice 2. (Propriétés fondamentales) Montrer les propriétés suivantes.

a) $A \cap (\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A \cap B_i)$ et $A \cup (\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A \cup B_i)$.

b) $(\bigcup_{i\in I} A_i)^c = \bigcap_{i\in I} A_i^c$ et $(\bigcap_{i\in I} A_i)^c = \bigcup_{i\in I} A_i^c$.

c) $A\backslash(\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I}(A\backslash B_i)$ et $(\bigcup_{i\in I} A_i)\backslash B = \bigcup_{i\in I}(A_i\backslash B)$.

d) $A\backslash(\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I}(A\backslash B_i)$ et $(\bigcap_{i\in I} A_i)\backslash B = \bigcap_{i\in I}(A_i\backslash B)$.

e) $(\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j) = \bigcup_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$ et $(\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j) = \bigcap_{(i,j)\in I\times J} A_i \times B_j$.

f) Déduire de la question précédente deux formules pour $(\bigcup_{i\in I} A_i) \times (\bigcap_{j\in J} B_j)$, respectivement deux formules pour $(\bigcap_{i\in I} A_i) \times (\bigcup_{j\in J} B_j)$.

Exercice 3. Soient X un ensemble et A et B deux parties fixées de X.

a) Simplifier les conditions suivantes portant sur la partie C de X.

$$\text{(i) } A \cup C \subset B \cup C\ ;\ \text{(ii) } A \cap C \subset B \cap C\ ;\ \text{(iii) } (A \cap C) \cup (B \cap C^c) = \varnothing.$$

b) On définit $f : \mathscr{P}(X) \to \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B)$ par $f(C) := (A \cap C, B \cap C)$. Déterminer, pour le couple (A, B), une condition nécessaire et suffisante pour que f soit (i) injective ; (ii) surjective.

Exercice 4. (Fonction indicatrice) Soit X un ensemble. Pour une partie A de X, on définit sa *fonction indicatrice* $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ par $\chi_A(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } x \in A \\ 0, & \text{si } x \notin A \end{cases}$.

a) Calculer $\chi_\varnothing$ et χ_X. Pour $A \subset X$ fixé et $Y \subset \mathbb{R}$, calculer $\chi_A^{-1}(Y)$.

b) Exprimer simplement en fonction de χ_A et χ_B les fonctions $\chi_{A^c}, \chi_{A\cap B}, \chi_{A\cup B}$ (dans le cas général et dans le cas particulier où $A \cap B = \varnothing$), $\chi_{A\triangle B}, \chi_{f^{-1}(A)}$ avec $f : X \to Y$ (X, Y deux ensembles).

c) Rappelons la notation suivante. Si B et C sont des ensembles, alors

$$B^C := \{f : C \to B\} \text{ (l'ensemble de fonctions de } C \text{ vers } B).$$

L'application $A \mapsto \chi_A$ est-elle une bijection de $\mathscr{P}(X)$ dans $\{0, 1\}^X$?

d) Montrer, à l'aide des fonctions caractéristiques, l'égalité $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$.

Exercice 5. (Suites d'ensembles) Soit $(A_n)_{n\geq 0}$ une suite de parties de X.

a) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante, alors $\displaystyle\bigcup_{n\geq n_0} A_n = \bigcup_{n\geq 0} A_n$, $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$.

b) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est décroissante, alors $\displaystyle\bigcap_{n\geq n_0} A_n = \bigcap_{n\geq 0} A_n$, $\forall\, n_0 \in \mathbb{N}$.

c) Soit $A := \displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A_n$. Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est croissante, alors la suite $(\chi_{A_n})_{n\geq 0}$ est croissante et converge simplement vers χ_A.

d) Énoncer et prouver le résultat analogue au précédent pour une suite décroissante.

e) Soit $A := \displaystyle\bigcup_{n\geq 0} A_n$. Si les A_n sont d. d. d. (deux à deux disjoints), montrer que $\chi_A = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \chi_{A_n}$.

Exercice 6. (Image directe, image réciproque) On se donne deux ensembles X et Y et une application $f : X \to Y$.

Si $A \subset X$, on définit $f(A) := \{f(x)\ ;\ x \in A\}$.

Si $B \subset Y$, on définit $f^{-1}(B) := \{x \in X\ ;\ f(x) \in B\}$.

Montrer les propriétés suivantes de l'image réciproque $B \mapsto f^{-1}(B)$.

a) $f^{-1}(\displaystyle\bigcup_{i\in I} B_i) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

b) $f^{-1}(\displaystyle\bigcap_{i\in I} B_i) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(B_i)$.

c) $f^{-1}(B^c) = (f^{-1}(B))^c$.

d) Si, de plus, g est une application de Y vers un ensemble Z, alors $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B))$.

Pour l'image directe $A \mapsto f(A)$, les relations analogues ne sont pas vraies en général.

e) Montrer que $f(\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i) = \bigcup_{i\in I} f(A_i)$.

f) Montrer que $f(\bigcap_{i\in I} A_i) \subset \bigcap_{i\in I} f(A_i)$ et donner un exemple montrant que l'égalité n'est pas vraie en général.

g) Montrer par des exemples qu'en général il n'y a aucune relation d'inclusion entre $f(A^c)$ et $(f(A))^c$.

Exercice 7. (Injectivité) Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) f est injective.

b) $\forall\, A \subset X, f^{-1}(f(A)) = A$.

c) $\forall\, x \in X, f^{-1}(f(\{x\})) = \{x\}$.

Exercice 8. (Surjectivité) Soit $f : X \to Y$ une application. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes.

a) f est surjective.

b) $\forall\, B \subset Y, f(f^{-1}(B)) = B$.

c) $\forall\, y \in Y, f(f^{-1}(\{y\})) = \{y\}$.

Exercice 9. (Produit cartésien)

a) Soient $A, C \in \mathscr{P}(X)$ et $B, D \in \mathscr{P}(Y)$. Montrer l'implication

$$(A \times B) \cap (C \times D) \neq \varnothing \implies [A \cap C \neq \varnothing \text{ et } B \cap D \neq \varnothing].$$

b) Si $A \subset X$ et $B \subset Y$, écrire $(X \times Y)\backslash(A \times B)$ comme une union finie de produits cartésiens d. d. d.

c) Si $A_i \subset X$ et $B_i \subset Y$, $\forall\, i \in [\![1, n]\!]$, montrer que $(X \times Y)\backslash(\bigcup_{i=1}^{n} A_i \times B_i)$ s'écrit comme une union finie de produits cartésiens.

Exercice 10. (Coupes) Si $E \subset X \times Y$, soient

$$\forall\, x \in X,\ E_x := \{y \in Y\,;\ (x, y) \in E\} \text{ et } \forall\, y \in Y,\ E^y := \{x \in X\,;\ (x, y) \in E\}.$$

a) Si $X = Y = \mathbb{R}$, « dessiner » E_x et E^y pour une « patate ».

b) Si $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$, trouver E_x et E^y pour chaque $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Montrer que $(\bigcup_{i\in I} E_i)_x = \bigcup_{i\in I}(E_i)_x$, $\forall\, x \in X$ et $(\bigcup_{i\in I} E_i)^y = \bigcup_{i\in I}(E_i)^y$, $\forall\, y \in Y$.

Exercice 11. (Union d. d. d.) La notation $\bigsqcup_{i\in I} A_i$ est utilisée pour la réunion d'une famille $(A_i)_{i\in I}$ d'ensembles deux à deux disjoints (d. d. d.).

a) Si $A_0, A_1, \ldots$, sont des parties de X, soient $B_0 := A_0$ et, pour $n \geq 1$, $B_n := A_n\backslash(\bigcup_{i=0}^{n-1} A_i)$. Montrer que $\bigcup_i A_i = \bigsqcup_i B_i$.

b) Montrer que $(\bigsqcup_{i\in I} A_i) \times B = \bigsqcup_{i\in I} A_i \times B$.