Université Claude Bernard - Lyon 1 Semestre d'automne 2024-2025
Mesure et Intégration

Fiche 1
SUP, INF, LIM SUP, LIM INF, DÉNOMBREMENT

Exercice # 1. Soient A, B des parties non vides de $\mathbb{R}$. Montrer que :

a) $M = \sup A$ si et seulement si M est un majorant de A et il existe une suite $(x_n)_n \subset A$ telle que $x_n \to M$. Trouver une caractérisation analogue de $\inf A$.

b) Tout A admet $\sup A \in]-\infty, \infty]$ et $\inf A \in [-\infty, \infty[$.

c) $\sup A$ et $\inf A$ sont uniques.

d) $\sup(-tA) = -t \inf A, \forall\, t \in]0, \infty[$. Donner les formules de $\sup(tA)$, $\inf(tA)$, $\inf(-tA)$.

e) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$ et $\inf(A + B) = \inf A + \inf B$.

f) Si $A \subset B$, alors $\inf B \leq \inf A \leq \sup A \leq \sup B$.

g) Si $(x_n)_{n \geq n_0} \subset \mathbb{R}$ est une suite croissante, alors $\lim_n x_n = \sup\limits_{n \geq n_0} x_n := \sup\{x_n\,;\, n \geq n_0\}$.

Trouver l'énoncé analogue pour une suite décroissante.

h) Si $\sup A > x \in \overline{\mathbb{R}}$, alors il existe un $y \in A$ tel que $y > x$.

i) Montrer que $\sup(A \bigcup B) = \max(\sup A,\ \sup B)$. Y a-t-il des formules pour $\inf(A \bigcup B)$, $\sup(A \bigcap B)$ et $\inf(A \bigcap B)$ pour $A \bigcap B \neq \emptyset$?

Exercice # 2. Que devient ce qui précède si nous considérons des parties non vides A, B de $\overline{\mathbb{R}}$?

Exercice # 3. Trouver $B \subset A \subset \mathbb{R}$ tels que $\inf A = -\infty$, $\inf B = 0$, $\sup B = 1$ et $\sup A = 2$.

Exercice # 4. Trouver $A \subset \mathbb{R}$ tel que $\sup A$ et $\min A$ existent dans $\mathbb{R}$, mais $\max A$ n'existe pas.

Exercice # 5. Soient A, B deux parties non vides de $\mathbb{R}$ telles que $\sup A = \inf B$.

a) Montrer que pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$ on a $x \leq y$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $y - x < \varepsilon$.

b) Inversement, on suppose que pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$ on a $x \leq y$. Montrer que si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $x \in A$ et $y \in B$ tels que $y - x < \varepsilon$, alors $\sup A = \inf B$.

Exercice # 6. Déterminer les bornes sup et inf des ensembles ci-dessous :

a) $A_1 := \left\{\cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\ ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

b) $A_2 := \left\{\dfrac{12n + 10^{-n}}{3n + 2}\ ;\ n \in \mathbb{N}\right\}$;

c) $A_3 := \left\{\left(1 + \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right)\ln n\ ;\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$.

Exercice # 7. Calculer

$$\sup_{x \geq 0,\, t \in \mathbb{R}} \frac{\cos(xt + \pi/4)}{1 + x^2}, \quad \sup_{x,\, t \in \mathbb{R}} \frac{e^{-x/(1+t^2)}}{1 + x + x^2}.$$

Exercice # 8. Trouver tous les ensembles $A \subset \mathbb{R}$, $A \neq \emptyset$, tels que

$$\sup(tA) = t \sup A,\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

Exercice # 9. Soient $a_{n,k} \in \mathbb{R}$, $\forall\, n, k \in \mathbb{N}$. A-t-on toujours

$$\sup_n \sup_k a_{n,k} = \sup_k \sup_n a_{n,k}?$$

Exercice # 10. Nous considérons une suite $(x_n)_n \subset \mathbb{R}$.

a) Si $\liminf_n x_n \geq \limsup_n x_n$, alors $x_n \to \limsup_n x_n = \liminf_n x_n$.

b) Si $a \leq x_n \leq b$, $\forall\, n \geq n_0$, alors $a \leq \liminf_n x_n \leq \limsup_n x_n \leq b$.

c) Si $x_n \geq a$, $\forall\, n \geq n_0$ et $\limsup_n x_n \leq a$, alors $x_n \to a$.

d) Donner des exemples de suites $(x_n)_n$ et $(y_n)_n$ avec $\limsup_n (x_n + y_n) \neq \limsup_n x_n + \limsup_n y_n$.

Exercice # 11. a) Montrer que $x_n \leq y_n$, $\forall\, n \geq n_0 \implies \limsup_n x_n \leq \limsup_n y_n$.

b) Quelles sont les hypothèses implicites de la question précédente ?

Exercice # 12. Trouver une suite réelle $(a_n)_n$ telle que $\sup_n a_n = 4$, $\limsup_n a_n = 2$, $\liminf_n a_n = 1$ et $\inf_n a_n = 0$.

Exercice # 13. Calculer $\limsup_n x_n$ et $\liminf_n x_n$ pour les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ respectivement par les formules :

a) $x_n := 1/(n+1)$.

b) $x_n := (n+1)^{(-1)^n}$.

c) $x_n := \left(2 + \cos\left(n\frac{\pi}{2}\right)\right) \dfrac{n}{2n+1}$.

d) $x_n := \dfrac{11n + 2\cos(n\pi)}{\sqrt{4n^2 + n - 1}}$.

Définitions. Soit $(A_n)_{n \geq n_0}$ une suite de parties d'un ensemble X. Les ensembles $\limsup_n A_n$ et $\liminf_n A_n$ sont définis respectivement par les formules

$$\limsup_n A_n := \bigcap_{n \geq n_0} \bigcup_{k \geq n} A_k, \ \liminf_n A_n := \bigcup_{n \geq n_0} \bigcap_{k \geq n} A_k.$$

Exercice # 14. a) Montrer que $x \in \limsup_n A_n$ si et seulement si x appartient à une infinité d'ensembles A_n.

b) Montrer que $x \in \liminf_n A_n$ si et seulement si il existe un n_1 (qui peut dépendre de $x \in X$) tel que $x \in A_n$, $\forall\, n \geq n_1$.

c) Pour tout $x \in X$, montrer les égalités

$$\chi_{\limsup_n A_n}(x) = \limsup_n \chi_{A_n}(x), \ \chi_{\liminf_n A_n}(x) = \liminf_n \chi_{A_n}(x).$$

d) Soit $(A_n)_{n \geq n_0}$ une suite croissante de parties de X. Montrer que

$$\limsup_n A_n = \liminf_n A_n = \bigcup_{n \geq n_1} A_n, \ \forall\, n_1 \geq n_0.$$

Quel est l'analogue de cette formule pour une suite décroissante ?

e) Montrer que

$$\limsup_n A_n = \left(\limsup_n A_{2n}\right) \bigcup \left(\limsup_n A_{2n+1}\right),$$
$$\liminf_n A_n = \left(\liminf_n A_{2n}\right) \bigcap \left(\liminf_n A_{2n+1}\right).$$

Exercice # 15. Déterminer les limites supérieures et inférieures des suites suivantes d'ensembles :

a) A_1 et A_2 donnés, $A_n = A_{n-2}$, $\forall\, n \geq 3$.

b) $A_{2n} := [-1, 2 + n^{-1}[$ et $A_{2n+1} :=]-2 - n^{-1}, 1]$, $\forall\, n \geq 1$.

c) $A_n :=]-\infty, a_n]$ avec $(a_n)_n \subset \mathbb{R}$ suite monotone.

Exercice # 16. Soit $X := [0,1[$. Montrer que tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$n = 2^m + p \text{ avec } m \in \mathbb{N} \text{ et } 0 \le p < 2^m. \tag{1}$$

Avec m et p déterminés (en fonction de n) par la formule (1), nous posons

$$A_n := \left[\frac{p}{2^m}, \frac{p+1}{2^m}\right[\subset X, \ \forall\, n \ge 1.$$

Trouver $\limsup A_n$ et $\liminf A_n$.

Exercice # 17. Comparer $\liminf_n (A_n \bigcup B_n)$ et $(\liminf_n A_n) \bigcup (\liminf_n B_n)$. Donner un exemple de suites telles que

$$\liminf_n (A_n \bigcup B_n) \neq (\liminf_n A_n) \bigcup (\liminf_n B_n).$$

Exercice # 18. Montrer que $(\limsup_n A_n) \setminus (\liminf_n A_n) \subset \limsup_n (A_n \triangle A_{n+1})$.

Rappels de cours. Dans les trois exercices suivants, on pourra utiliser sans preuve les faits suivants :

a) L'intervalle $[0,1[\subset \mathbb{R}$ n'est pas a. p. d.
b) Si $A \subset \mathbb{N}$ est infini, alors A est dénombrable.
c) S'il existe une bijection $\Phi : A \to B$, alors :
    (i) Soit A et B sont tous les deux finis ;
    (ii) Soit A et B sont tous les deux dénombrables ;
    (iii) Soit aucun des deux ensembles n'est a. p. d.

Exercice # 19. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) L'ensemble des nombres premiers est dénombrable.
b) L'ensemble des nombres pairs est dénombrable.
c) L'ensemble $\mathbb{R}$ est dénombrable.
d) L'ensemble $\mathbb{C}$ est dénombrable.
e) L'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$ est dénombrable.
f) L'ensemble $\mathscr{P}(\mathbb{N}) = \{A\,;\ A \subset \mathbb{N}\}$ est dénombrable.

Exercice # 20. a) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p_1, \ldots, p_n$ n nombres premiers distincts. Montrer, à l'aide de l'application

$$\varphi : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N},\ \mathbb{N}^n \ni (k_1, \ldots, k_n) \mapsto \varphi(k_1, \ldots, k_n) := p_1^{n_1} \cdots p_n^{k_n} \in \mathbb{N},$$

que $\mathbb{N}^n$ est dénombrable.

b) En déduire que le produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables est dénombrable. Que peut-on dire d'un produit cartésien infini d'ensembles dénombrables ?
c) Montrer que $\mathscr{P}_f(\mathbb{N}) := \{A\,;\ A \subset \mathbb{N},\ A \text{ est fini}\}$ est dénombrable.

Exercice # 21. Un nombre réel x est dit *algébrique* s'il existe un polynôme non nul $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que $P(x) = 0$. Un nombre réel qui n'est pas algébrique est *transcendant*.

a) Montrer que tout nombre rationnel est algébrique.
b) Montrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.
c) Montrer que l'ensemble des nombres transcendants n'est pas dénombrable.

Exercice # 22. Soit $A \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. Soit $B = \overline{A} \setminus A$ (avec $\overline{A}$ l'adhérence de A). Existe-t-il un A tel que :

a) B ait exactement n éléments, pour un $n \in \mathbb{N}$ donné ?

b) B soit dénombrable ?

c) B ne soit pas a. p. d. ?

Exercice # 23. Montrer qu'il existe un nombre réel qui ne peut pas être décrit par une définition mathématique.

Exercice # 24. Nous admettons le résultat suivant, qui sera démontré en topologie : tout ouvert $U \subset \mathbb{R}$ s'écrit $U = \bigsqcup_{i \in I} J_i$, avec les J_i intervalles ouverts non vides (et d. d. d). Montrer que I est a. p. d. Donc : *tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion a. p. d. d'intervalles ouverts d. d. d.*

Exercice # 25. Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, $f(p, q) := \dfrac{(p+q)(p+q+1)}{2} + q$, $\forall\, p, q \in N$. Montrer que f est bijective. Conclure