Fiche 2
TRIBUS, FONCTIONS MESURABLES

Exercice 1. Montrer que
a) $\mathscr{P}(X)$ est une tribu.
b) $\mathscr{T} := \{\emptyset, X\}$ est une tribu.

Exercice 2. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.
a) Si X est dénombrable, alors toute tribu sur X est a. p. d.
b) Une partie $\mathscr{T}$ de $\mathscr{P}(X)$ est une tribu si elle vérifie :
 (i) $\emptyset \in \mathscr{T}$.
 (ii) $A \in \mathscr{T} \implies A^c \in \mathscr{T}$.
 (iii) $[A_n \in \mathscr{T},\ \forall\, n] \implies \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{T}$.

Exercice 3. Le but de cet exercice est de montrer qu'une réunion *arbitraire* d'ensembles mesurables n'est pas nécessairement un ensemble mesurable. Soit

$$\mathscr{T} := \{A \subset \mathbb{R}\,;\ A \text{ a. p. d. ou } A^c \text{ a. p. d.}\}.$$

a) Montrer que $\mathscr{T}$ est une tribu.
b) Montrer que $\mathscr{T} \neq \mathscr{P}(\mathbb{R})$.
c) Conclure.

Exercice 4. Pour X ensemble et $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$, on note $\mathscr{T}(\mathscr{A})$ la tribu sur X engendrée par $\mathscr{A}$.
a) Soit $X := \{1, 2, 3\}$ et $\mathscr{A} := \{\{1\}\}$. Montrer que $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \{\emptyset, X, \{1\}, \{2, 3\}\}$.
b) Soit $X := \mathbb{N}$ et $\mathscr{A} := \{\{n\}\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que $\mathscr{T}(\mathscr{A}) = \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Exercice 5. Déterminer les tribus engendrées dans X par la famille $\mathscr{A}$, où :
a) $X := \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} := \{\mathbb{Z}\}$.
b) $X := \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} := \{\{n\}\,;\ n \in \mathbb{Z}\}$.
c) $X := \mathbb{N}$ et $\mathscr{A} = \{\{0\}, \{2\}, \{4\}, \ldots\}$.

Exercice 6. a) Soit $\mathscr{T}$ une tribu sur X. Soit $Y \subset X$. Montrer que $\mathscr{T}_Y := \{A \cap Y\,;\ A \in \mathscr{T}\}$ est une tribu sur Y. $\mathscr{T}_Y$ est la *tribu induite* par $\mathscr{T}$ sur Y.
b) Montrer que si $Y \in \mathscr{T}$, alors $\mathscr{T}_Y = \{A\,;\ A \in \mathscr{T},\ A \subset Y\}$.

Exercice 7. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $Y \subset X$, muni de la métrique induite par X. Montrer que $\mathscr{B}_Y = \{B \cap Y\,;\ B \in \mathscr{B}_X\}$.
De manière équivalente, $\mathscr{B}_Y$ coïncide avec la tribu induite par $\mathscr{B}_X$ sur Y (voir l'exercice précédent).

Exercice 8. Montrer que si $\mathscr{T}$ est une tribu et $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{T}$, alors $A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathscr{T}$.

Exercice 9. Montrer que si $(\mathscr{A}_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles $\mathscr{A}_i \subset \mathscr{P}(X)$ telle que chaque $\mathscr{A}_i$ soit une tribu sur X alors $\bigcap_{i\in I} \mathscr{A}_i$ est une tribu sur X.

Exercice 10. a) Montrer que si $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, alors $\mathscr{T}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{T}(\mathscr{B})$.

b) Montrer que $\mathscr{T}(\mathscr{T}(\mathscr{A})) = \mathscr{T}(\mathscr{A})$.

Exercice 11. Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Si $A \in \mathscr{T}(\mathscr{A})$, montrer qu'il existe une partie a. p. d. $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ telle que $A \in \mathscr{T}(\mathscr{B})$.

Indication : considérer $\mathscr{C} := \{A \in \mathscr{T}(\mathscr{A})\,;\ \exists\, \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ a. p. d. tel que $A \in \mathscr{T}(\mathscr{B})\}$.

Exercice 12. a) Montrer que la réunion de deux tribus n'est pas nécessairement une tribu.

b) Montrer que la réunion d'une suite finie et croissante de tribus est une tribu.

c) Ce dernier résultat ne passe pas à une union infinie. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{T}_n$ la tribu sur $\mathbb{N}$ engendrée par $\mathscr{P}(\{0, \ldots, n\})$. Montrer que $(\mathscr{T}_n)_{n \geq 0}$ est une suite croissante de tribus sur $\mathbb{N}$, mais que $\bigcup\limits_{n \geq 0} \mathscr{T}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 13. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Un ouvert ou un fermé est un borélien.

b) Un borélien est un ouvert ou un fermé.

c) Un intervalle est dans $\mathscr{B}_{\mathbb{R}}$.

Exercice 14. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) L'ensemble $[2, 3[\, \cap\, \mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

b) L'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R}\,;\ \cos x = \sin \sin x\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

c) Si $B \subset \mathbb{R}$ est borélien et si $A \subset B$, alors A est borélien.

Exercice 15. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $f : X \to \mathbb{R}$.

a) Montrer que f est continue en $x \in X$ si et seulement si $\forall\, \varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que
$$[y, z \in V] \implies |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

b) En déduire que $\{x \in X\,;\ f$ continue en $x\}$ est un borélien.

Exercice 16. Soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme entre espaces métriques et soit $A \subset X$. Montrer que $A \in \mathscr{B}_X$ si et seulement si $\Phi(A) \in \mathscr{B}_Y$.

Exercice 17. a) Soient $A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ et $B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m}$. Montrer que $A \times B \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.

b) Plus généralement, soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Montrer que si nous munissons $X \times Y$ d'une métrique produit, alors $\mathscr{B}_X \times \mathscr{B}_Y \subset \mathscr{B}_{X \times Y}$.

Exercice 18. Dans cet exercice, nous considérons un espace mesurable $(X, \mathscr{T})$. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.

b) Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable, et si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne étagée, alors $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ est étagée.

c) Si $f : X \to \mathbb{R}$ est telle que $f^{-1}(F) \in \mathscr{T}$ pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé, alors f est mesurable.

d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.

e) Si $A \subset X$, alors $\chi_A : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $A \in \mathscr{T}$.

f) La fonction suivante est borélienne : $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \begin{cases} x + 1, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$

g) La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable si et seulement si $|f|$ est mesurable.

Exercice 19. Décrire les fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ pour les tribus suivantes :

a) X est muni de $\mathscr{T} = \{\emptyset, X\}$;

b) X est muni de $\mathscr{T} = \mathscr{P}(X)$.

Exercice 20. Montrer qu'un fonction monotone $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne.

Exercice 21. a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f' est borélienne.

b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :

(i) f est dérivable en x et $f'(x) = \ell$.

(ii) Nous avons la double égalité :

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{m\to\infty} \inf \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \; ; \; h \in \mathbb{Q}^*, \; |h| < \frac{1}{m} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \; ; \; h \in \mathbb{Q}^*, \; |h| < \frac{1}{m} \right\}.\end{aligned}$$

c) En déduire que, si f est continue, alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} f'(x) & \text{si } f \text{ est dérivable en } x\,; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est borélienne.

d) Vrai ou faux ? Si $g = 0$, alors f est constante (où g est définie en c).

Dans les exercices suivants, $\mathscr{T} \subset \mathscr{P}(X)$ est une tribu. La mesurabilité des fonctions considérées s'entend par rapport à $\mathscr{T}$.

Exercice 22. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable et $g : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } f(x) \in \mathbb{Q}\,; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Montrer que g est mesurable.

Exercice 23. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction étagée. Montrer que $f^{-1}(B) \in \mathscr{T}$, $\forall\, B \subset \mathbb{R}$.

Exercice 24. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonctions étagées et $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $f + g$ et λf sont étagées.

Exercice 25. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. On définit, pour tout $0 < M < \infty$, la fonction f_M par

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } |f(x)| < M\,; \\ M & \text{si } f(x) \geq M\,; \\ -M & \text{si } f(x) \leq -M. \end{cases}$$

Montrer que f est mesurable si et seulement si f_M est mesurable pour tout $M > 0$.

Exercice 26. Soit $(f_n)_{n\geq 0}$ une suite de fonctions mesurables de X dans $\mathbb{R}$.

a) Rappeler pourquoi $\liminf\limits_n f_n$ et $\limsup\limits_n f_n$ sont mesurables.

b) Montrer que $B := \{x \in X\,;\ (f_n(x))_n \text{ est bornée}\}$ est mesurable.

c) Soit $a \in \mathbb{R}$. On définit $g : X \to [0, \infty]$ par $g(x) := \inf\{n \in \mathbb{N}\,;\ f_n(x) \geq a\}$, avec la convention $\inf \emptyset = \infty$. Montrer que g est mesurable.

Exercice 27. Soit (X, d) un espace métrique.

a) Soient $A \in \mathscr{B}_X$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Alors f est borélienne.
En particulier, toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est borélienne.

b) Plus généralement, si f est continue en dehors d'une partie a. p. d. de X, alors f est borélienne.

c) Encore plus généralement, soit $(A_k)_{k\geq 0}$ une suite de boréliens d. d. d. tels que $X = \bigsqcup_{k\geq 1} A_k$. Pour chaque k, soit $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Alors f est borélienne.

d) Idem si, dans le point précédent, on remplace « f_k continue » par « f_k borélienne » (voir aussi le point f)).

e) Idem pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

f) Soit $(X, \mathscr{T})$ un espace mesurable. Soient $A_1, A_2, \ldots,$ mesurables d. d. d. tels que $X = \sqcup_k A_k$. Pour chaque k, soit $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Alors f est mesurable.

g) Montrer que les propriétés a) à e) sont des cas particuliers de la propriété f).

Exercice 28. Soit (X, d) un espace métrique. Soient $f_n : X \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{x \in X \; ; \; (f_n(x))_n \text{ converge}\}$ est un borélien.