

---

**Fiche 4**  
**INTÉGRALE. CONVERGENCE MONOTONE ET DOMINÉE**

---

**Exercice # 1.** Écrire de manière plus simple la quantité  $\int f d\mu$  lorsque :

- a)  $\mu$  est une mesure de Dirac.
- b)  $\mu$  est la mesure de comptage sur  $\mathbb{N}$ .

**Exercice # 2.** Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

- a) Si  $f = \chi_A$  avec  $A \in \mathcal{T}$ , alors  $\int f d\mu = \mu(A)$ .
- b) Si  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  est intégrable, alors  $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$ .
- c) Si  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  est mesurable et satisfait  $\mu(f^{-1}(\infty)) = 0$ , alors  $f$  est intégrable.
- d) Si  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  est mesurable et satisfait  $\int f d\mu = 0$ , alors  $f = 0$ .
- e) Si  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  est mesurable et satisfait  $\int f d\mu = 0$ , alors  $f = 0$   $\mu$ -p. p.
- f) Si  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  est mesurable et satisfait  $f = 0$   $\mu$ -p. p., alors  $\int f d\mu = 0$ .
- g) Le produit de deux fonctions intégrables est intégrable.

**Exercice # 3.** Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. Si  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  est mesurable, alors

$$\int f d\mu = \sup \left\{ (1 - \varepsilon) \int u d\mu ; u \text{ étagée}, 0 \leq u \leq f, 0 < \varepsilon < 1 \right\}.$$

**Exercice # 4.** Dans cet exercice,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ , muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue.

- a) Soit  $I := ]0, 1[$ . Soit  $0 < \alpha < \infty$ . À quelle condition la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^\alpha}$  est-elle intégrable sur  $I$ ?
- b) Même question avec  $I := [1, \infty[$  et  $I := ]0, \infty[$ .

**Exercice # 5.** a) On considère la fonction  $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) := \begin{cases} x, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ x^2, & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Montrer que  $f$  est Lebesgue intégrable sur  $[0, 1]$  et calculer son intégrale.

b) Mêmes questions pour la fonction  $f : [0, \pi/2] \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) := \begin{cases} \sin x, & \text{si } \cos x \in \mathbb{Q} \\ \sin^2 x, & \text{si } \cos x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

**Exercice # 6.** Étudier l'existence et la finitude de :

- a)  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x^a} dx$ , avec  $a = 1, 3/2$ , ou  $2$ , au sens des intégrales généralisées ou de Lebesgue.
- b) La somme de la série  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^a}$ , avec  $a = 1$  ou  $2$ .

c) L'intégrale  $\int_{\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n^a} d\mu(n)$ , avec  $a = 1$  ou  $2$ , et  $\mu$  la mesure de comptage.

**Exercice # 7.** (Théorème de convergence décroissante) Soit  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $(f_n)_{n \geq 0}$  une suite décroissante de fonctions mesurables positives sur  $X$ , avec  $f_0$  intégrable.

a) Montrer (via le théorème de convergence monotone) que  $\lim_n \int f_n d\mu = \int \lim_n f_n d\mu$ .

b) Montrer par un contre-exemple que l'hypothèse  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tel que  $f_{n_0}$  intégrable, est nécessaire.

**Exercice # 8.** Soit  $P$  une probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $I_n := \int_{\mathbb{R}} (\cos \pi t)^{2n} dP(t)$ .

a) Montrer que  $I_n < \infty, \forall n$ .

b) Montrer que la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$  est décroissante.

c) Déterminer  $\lim_n I_n$ .

**Exercice # 9.** Soit  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et soit  $f : X \rightarrow [0, \infty]$  une application mesurable.

a) Soient  $A := \{x \in X ; f(x) > 1\}$ ,  $B := \{x \in X ; f(x) = 1\}$  et  $C := \{x \in X ; f(x) < 1\}$ .

Déterminer  $\lim_n \int_{A \cup B} f^n d\mu$ .

b) Déterminer  $\lim_n \int_X f^n d\mu$ . On pourra commencer par le cas où  $\int_X f d\mu < \infty$ .

**Exercice # 10.** Soit  $P$  une probabilité sur  $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+})$ . Pour  $x \geq 0$ , soit  $F(x) := \int_{\mathbb{R}_+} e^{-xt} dP(t)$ .

a) Montrer que  $F$  est décroissante.

b) Soit  $(x_n) \subset \mathbb{R}_+$  telle que  $x_n \nearrow \infty$ . Déterminer  $\lim_n F(x_n)$ .

c) En déduire la valeur de  $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ .

**Exercice # 11.** a) Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Montrer que si  $(f_n)_{n \geq n_0}$  est une suite de fonctions boréliennes positives sur  $I$ , alors

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \int_I f_n d\nu_1 = \int_I \left( \sum_{n=n_0}^{+\infty} f_n \right) d\nu_1.$$

b) En déduire la valeur de

$$\sum_{n=3}^{\infty} \int_1^{\infty} \frac{x}{(1+x)^n} dx.$$

**Exercice # 12.** Déterminer, pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_n \int_0^1 \left( x^\alpha + \frac{e^x}{n} \right)^{-1} dx$ .

**Exercice # 13.** Calculer  $\lim_n \int_1^{\infty} \frac{n \sin(x/n)}{x^3} dx$ .

**Exercice # 14.** Dans cet exercice,  $I$  est un intervalle de  $\mathbb{R}$ , muni de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue  $\lambda (= \nu_1)$ . Montrer que les fonctions suivantes sont intégrables sur  $I$  et déterminer

$$\lim_n \int_I f_n d\lambda.$$

a)  $I := [0, 1]$ ,  $f_n(x) := \frac{nx \sin x}{1 + (nx)^\alpha}$ , où  $1 < \alpha < 2$ .

b)  $I := [A, \infty[$  (avec  $A > 0$ ) et  $f_n(x) := \frac{n^2 x \exp(-n^2 x^2)}{1 + x^2}$ .

c)  $I := [0, 1]$  et  $f_n(x) := \sqrt{n} \chi_{[1/n, 2/n]}(x)$ .

**Exercice # 15.** Soit  $f$  une fonction Lebesgue intégrable sur  $[0, \infty[$ . Calculer

$$\lim_n \int_0^\infty f(x) \frac{x}{x+n} d\lambda(x).$$

**Exercice # 16.** Calculer

$$\lim_n \int_0^\infty \frac{(\sin x)^n}{x^2} dx.$$

**Exercice # 17.** Soit  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $f$  une fonction mesurable positive sur  $X$ . Montrer que

$$\lim_n n \int_X \ln \left( 1 + \frac{1}{n} f \right) d\mu = \int_X f d\mu.$$

**Exercice # 18.** Soit  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction Lebesgue intégrable. Calculer

$$\lim_n \int_0^\infty \exp(-n \sin^2 x) f(x) d\lambda(x).$$

**Exercice # 19.** Rappelons que, si  $y \geq 0$ , alors la suite  $\left( \left( 1 - \frac{y}{n} \right)^n \right)_{n \geq y}$  est croissante, de limite  $e^{-y}$ .

Soit  $f_n(x) := n(1-x)^n \sin^2(nx) \chi_{[0,1]}(x)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .

a) Déterminer la limite simple (notée  $f$ ) de la suite  $(f_n)_{n \geq 1}$ .

b) Calculer, en utilisant le rappel et le théorème de convergence monotone,  $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx$ .

c) Montrer que  $\lim_n \int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx \neq \int_{\mathbb{R}} \lim_n f_n(x) dx$ .

**Exercice # 20.** Soient  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction intégrable.

a) Pour  $n \geq 0$ , soit  $A_n := \{x \in X ; |f(x)| \geq n\}$ . Déterminer  $\lim_n \int_{A_n} f d\mu$ .

b) Soit  $A \in \mathcal{F}$  tel que  $\mu(A) < \infty$ . Déterminer  $\lim_n \int_A |f|^{1/n} d\mu$ .

c) Mêmes questions si  $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ .

**Exercice # 21.** Soit  $P$  une probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$  telle que la fonction  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \exp(a|t|)$  soit intégrable pour tout  $a \in \mathbb{R}$ .

a) Donner deux exemples de telles mesures « de nature différente ».

b) Montrer que  $t \mapsto t^n$  est intégrable pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

c) Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

(i) Montrer que  $t \mapsto \exp(zt)$  est intégrable.

(ii) Posons  $F(z) := \int_{\mathbb{R}} \exp(zt) dP(t)$ . Montrer que  $F$  admet un développement en série entière

$$\text{de la forme } F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n, \text{ où l'on explicitera les coefficients } a_n.$$

**Exercice # 22.** Soit  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu$  finie. Soit  $f : X \rightarrow [0, \infty[$  une fonction mesurable et, pour  $n \geq 1$ , soit  $I_n := \int_X \frac{f^n}{1+f^n} d\mu$ . Calculer  $\lim_n I_n$ .

**Exercice # 23.** Rappelons que

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \nearrow e^x, \forall x \geq 0.$$

Nous considérons, pour tout  $n \geq 2$ , la fonction  $f_n : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f_n(x) := \frac{1}{x^{1/n} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n}, \forall x > 0.$$

- Démontrer que, pour  $n \geq 2$  et  $x \geq 1$ , nous avons  $f_n(x) \leq 4/x^2$ .
- Montrer que, pour tout  $n \geq 2$ ,  $f_n$  est Lebesgue intégrable sur  $]0, \infty[$ .
- Calculer  $\lim_n \int_0^\infty f_n(x) dx$ .

**Exercice # 24.** Pour tout entier  $n \geq 1$  et tout réel  $x$ , soit  $f_n(x) := e^{-nx} - 2e^{-2nx}$ .

- Montrer que  $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$  est une série convergente pour tout  $x > 0$ , et calculer sa somme  $f(x)$ .
- Comparer  $\int_0^\infty \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x) dx$  et  $\sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^\infty f_n(x) dx$ . Expliquer.

**Exercice # 25.** Nous munissons l'intervalle  $[0, 1]$  de sa tribu borélienne et de la mesure de Lebesgue  $\lambda (= \nu_1)$ . Soit  $(f_n)_{n \geq 2}$  la suite de fonctions définies sur  $[0, 1]$  par

$$f_n(x) := \begin{cases} n^2 x, & \text{si } 0 \leq x < 1/n \\ -n^2(x - 2/n), & \text{si } 1/n < x \leq 2/n \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- Tracer le graphique de  $f_n$ .
- Calculer et comparer  $\lim_n \inf \int f_n d\lambda$ ,  $\int \lim_n \inf f_n d\lambda$ ,  $\lim_n \sup \int f_n d\lambda$  et  $\int \lim_n \sup f_n d\lambda$ .
- Mêmes questions avec la suite de fonctions  $(g_n)_{n \geq 1}$  définie par  $g_{2p} := \chi_{[0, 1/(2p)]}$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}^*$ ,  $g_{2p+1} := \chi_{[1/(2p+1), 1]}$ ,  $\forall p \in \mathbb{N}$ .

**Exercice # 26.** a) Montrer que la fonction

$$f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, f(x) := \frac{\sin x}{e^x - 1}, \forall x > 0,$$

est Lebesgue intégrable sur  $]0, \infty[$ .

- Montrer que, pour tout  $x > 0$ , nous avons  $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx} \sin x$ .
- En déduire que  $\int_0^\infty \frac{\sin x}{e^x - 1} dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$ .

**Exercice # 27.** Soient  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow [0, \infty[$  une fonction mesurable.

- Supposons  $\mu$  finie. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $X_n := f^{-1}([n, n+1[)$ . Montrer que  $f$  est  $\mu$ -intégrable si et seulement si  $\sum_{n=0}^{+\infty} n \mu(X_n) < \infty$ .

b) Nous ne supposons plus  $\mu$  finie. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , soit  $F_n := f^{-1}([2^n, 2^{n+1}[)$ . Montrer que  $f$  est  $\mu$ -intégrable si et seulement si  $\sum_{n=-\infty}^{\infty} 2^n \mu(F_n) < \infty$ .

**Exercice # 28.** Soient  $(X, \mathcal{F}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow [0, \infty[$  une fonction mesurable. Posons

$$F_f(t) := \mu(f^{-1}(]t, \infty[)) = \mu([f > t]), \forall t \geq 0;$$

$F_f$  est la *fonction de distribution* de  $f$ .

Pour traiter les questions suivantes, on pourra commencer par le cas où  $f$  est une fonction étagée.

a) Montrer que  $F_f$  est borélienne.

b) (Décomposition en tranches) Montrer que  $\int_X f d\mu = \int_0^{\infty} F_f(t) dt$ .

c) Plus généralement, soit  $\Phi : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  une fonction croissante de classe  $C^1$  avec  $\Phi(0) = 0$ . Montrer que  $\int_X \Phi(f) d\mu = \int_0^{\infty} \Phi'(t) F_f(t) dt$ .

d) (Calcul de moments) Soient  $1 \leq p < \infty$  et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable. Montrer que

$$\int |f|^p = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \mu(|f| > t) dt.$$

**Exercice # 29.** (L'exercice précédent, vue probabiliste) En théorie des probabilités,  $\mu$  est une probabilité, et on travaille plutôt avec la *fonction de répartition*  $G_f(t) := \mu([f \leq t]), \forall t \geq 0$ . « Traduire » l'exercice précédent en fonction de  $G_f$ .

**Exercice # 30.** (Inégalité de Jensen) Soit  $(X, \mathcal{F}, P)$  un espace probabilisé. Soient  $I \subset \mathbb{R}$  un intervalle ouvert et  $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction convexe.

Nous admettons dans la suite le fait suivant (qui caractérise la convexité de  $\Phi$ ). Pour tout  $t \in I$ , il existe une fonction affine  $\Psi$  (c'est-à-dire, une fonction de la forme  $\Psi(s) = a s + b, \forall s \in \mathbb{R}$ ) telle que :

- (i)  $\Psi(s) \leq \Phi(s), \forall s \in I;$
- (ii)  $\Psi(t) = \Phi(t).$

Soit  $f : X \rightarrow I$  une fonction intégrable.

a) Montrer que  $\int f dP \in I$ .

b) Si  $\Psi$  est affine, comparer les nombres  $\int \Psi(f) dP$  et  $\Psi(\int f dP)$ .

c) En déduire l'*inégalité de Jensen* :

$$\int \Phi(f) dP \geq \Phi\left(\int f dP\right). \quad (J)$$

**Exercice # 31.** a) Écrire l'inégalité de Jensen (J) dans les cas suivants :

- (i)  $I := \mathbb{R}, \Phi(t) := e^t, \forall t \in \mathbb{R}.$
- (ii)  $I := ]0, \infty[, \Phi(t) := \ln t, \forall t \in ]0, \infty[.$
- (iii)  $I := \mathbb{R}, 1 \leq p < \infty, \Phi(t) := |t|^p, \forall t \in \mathbb{R}.$

b) Obtenir, à partir de (J) appliquée à un espace probabilisé et à une fonction convexe convenables, le cas particulier suivant de l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$n \sum_{j=1}^n (a_j)^2 \geq \left( \sum_{j=1}^n a_j \right)^2, \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}.$$

c) Que devient (J) si  $X$  est un ensemble fini non-vidé,  $\mathcal{F} = \mathcal{P}(X)$ , et  $\mu(A) = \frac{\#A}{\#X}, \forall A \subset X$ ?

d) Et si, de plus par rapport à la question précédente,  $I = ]0, \infty[$  et  $\Phi(t) = -\ln t, \forall t > 0$ ?

**Exercice # 32.** (Variables aléatoires indépendantes) Soient  $(X, \mathcal{T}, P)$  un espace probabilisé et  $f, g : X \rightarrow [0, \infty[$  des variables aléatoires (=fonctions mesurables). Nous supposons les variables aléatoires  $f$  et  $g$  indépendantes, au sens suivant :

$$P([f \in A, g \in B]) = P([f \in A]) \cdot P([g \in B]), \forall A, B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}.$$

a) Soient  $\Phi, \Psi : [0, \infty[ \rightarrow [0, \infty[$  deux fonctions boréliennes. Montrer que  $\Phi \circ f$  et  $\Psi \circ g$  sont indépendantes.

b) Si  $f, g$  sont, de plus, étagées, montrer que  $\int fg dP = \int f dP \cdot \int g dP$ .

À partir de maintenant,  $f, g$  ne sont plus supposées étagées.

c) Montrer qu'il existe deux suites,  $(f_n)_n$  et  $(g_n)_n$ , de fonctions étagées positives telles que  $f_n$  et  $g_n$  soient indépendantes,  $\forall n, m, f_n \nearrow f$  et  $g_n \nearrow g$ .

(Indication : examiner le procédé d'approximation d'une fonction mesurable par des fonctions étagées et utiliser la question a)).

d) Montrer que  $\int fg dP = \int f dP \cdot \int g dP$ .

e) Si  $f, g$  sont intégrables, alors  $fg$  est intégrable. Contradiction?

f) Pourquoi ne pas considérer des mesures plus générales que des probabilités?

**Exercice # 33.** (Mesures à densité) Soit  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré. Soit  $g : X \rightarrow [0, \infty]$  une fonction mesurable.

a) Montrer que

$$\nu : \mathcal{T} \rightarrow [0, \infty], \nu(A) := \int_A g d\mu, \forall A \in \mathcal{T},$$

est une mesure (à densité  $g$  par rapport à  $\mu$ ).

b) Sous quelles hypothèses sur  $g$  cette mesure est-elle :

(i) Finie?

(ii)  $\sigma$ -finie?

c) Dans  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ , montrer que  $\delta_0$  n'est pas une mesure à densité par rapport à  $\nu_1$ .

**Exercice # 34.** (Formule de transfert) Soient  $(X, \mathcal{T}, \mu)$  un espace mesuré et  $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction mesurable.

Rappelons que la mesure image  $f_*\mu$  est la mesure borélienne sur  $\mathbb{R}^n$  définie par

$$f_*\mu(B) := \mu(f^{-1}(B)), \forall B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

a) Montrer que pour toute fonction borélienne  $\Phi : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty[$  nous avons la formule de transfert

$$\int_X \Phi \circ f d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} \Phi df_*\mu.$$

On pourra commencer par  $\Phi$  étagée.

b) Par souci de simplicité, nous étudions ce qui suit principalement pour  $n = 1$ . En théorie des probabilités :

1  $\mu$  est une probabilité sur  $X$ .

2 Si  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  est une variable aléatoire, ce qui est connu n'est pas  $\mu$ , mais la loi de  $f$ , c'est-à-dire la mesure image  $f_*\mu$ , notée  $P_f$ . (Pour ajouter à la confusion,  $f$  est notée  $X$ , et sa loi  $P_X$ , mais dans ce cours  $X$  est l'espace ambient des fonctions mesurables.)

3 L'intégrale d'une variable aléatoire  $f$  (si elle existe) est désignée comme l'espérance de  $f$  et notée  $\mathbb{E}(f)$ .

(i) Montrer que  $P_f$  est une probabilité sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ .

- (ii) Écrire, sous réserve d'existence et à l'aide de  $P_f$ ,  $\mathbb{E}(f)$ ,  $\mathbb{E}(f - \mathbb{E}(f))^2$ ,  $\mathbb{R} \ni t \mapsto \mathbb{E}(e^{tf})$ , qui, en langage probabiliste sont, respectivement, l'espérance, la variance et la fonction caractéristique de  $f$ .
- (iii) Que deviennent ces formules si  $P_f$  est une probabilité à densité par rapport à  $\nu_1$ ?
- c) Si  $f = (f_1, \dots, f_n) : X \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un vecteur aléatoire (=fonction mesurable), exprimer, en fonction de la loi de  $f$ , la fonction caractéristique  $\mathbb{R}^n \ni t \mapsto \mathbb{E} \left( e^{i \sum_{j=1}^n t_j f_j} \right)$ .

**Exercice # 35.** (Suites croissantes de mesures)

- a) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , soit  $(a_{n,k})_{n \geq 0}$  une suite telle que

$$a_{n,k} \geq 0, \forall n, k \geq 0, \tag{H1}$$

$$(a_{n,k})_{k \geq 0} \text{ est croissante, } \forall n \geq 0. \tag{H2}$$

Soit  $a_n := \lim_{k \rightarrow \infty} a_{n,k}, \forall n \geq 0$ .

Montrer que  $\lim_k \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} = \sum_{n \geq 0} a_n$ .

- b) Soit  $(X, \mathcal{T})$  un espace mesurable. Soit  $(\mu_k)_{k \geq 0}$  une suite de mesures sur  $\mathcal{T}$  telles que :

$$(\mu_k(A))_{k \geq 0} \text{ est croissante, } \forall A \in \mathcal{T}. \tag{H}$$

Pour  $A \in \mathcal{T}$ , soit  $\mu(A) := \lim_k \mu_k(A)$ .

- (i) Montrer que  $\mu$  est une mesure sur  $\mathcal{T}$ .
- (ii) Montrer que pour toute fonction  $\mathcal{T}$ -mesurable  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ , la suite  $(\int f d\mu_k)_{k \geq 0}$  est croissante.  
On pourra commencer par le cas où  $f$  est étagée.
- (iii) Montrer que pour toute fonction  $\mathcal{T}$ -mesurable  $f : X \rightarrow [0, \infty]$ , on a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int f d\mu_k = \int f d\mu.$$

On pourra commencer par le cas où  $f$  est étagée.

**Exercice # 36.** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , soit  $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_n(x) := \begin{cases} x + n, & \text{si } x \leq -n \\ 0, & \text{si } x > -n \end{cases}$ . Montrer que :

- a)  $f_n$  a une intégrale par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mu$ .
- b)  $f_n \nearrow 0$ .
- c)  $\int f_n d\mu \rightarrow \int 0 d\mu$ .
- d) Quelle hypothèse de théorème de convergence monotone n'est pas satisfaite?

**Exercice # 37.** En considérant, sur  $\mathbb{R}$ , les fonctions  $f_n(x) := -(x + n)_-$ , montrer que l'hypothèse  $f_n \geq 0$  est essentielle pour avoir la conclusion du lemme de Fatou.

**Exercice # 38.** En considérant, dans  $\mathbb{R}$ , la suite  $f_n := \chi_{[n, n+1]}$ , montrer que l'hypothèse de domination est essentielle pour la validité du théorème de convergence dominée.

**Exercice # 39.** Nous munissons  $[0, 1]$  de la mesure de Lebesgue. Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $m = m(n)$  l'unique entier tel que  $m^2 \leq n < (m + 1)^2$ . Soient

$$A_n := \left[ \frac{n - m^2}{2m + 1}, \frac{n + 1 - m^2}{2m + 1} \right], f_n := \sqrt{m} \chi_{A_n}.$$

Montrer que :

- a)  $\int |f_n| \rightarrow 0$ .
- b) Il n'existe pas  $g$  intégrable telle que  $|f_n| \leq g$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- c) Pour tout  $x \in [0, 1]$ , nous avons  $f_n(x) \rightarrow 0$ .

En déduire qu'en général la conclusion de la réciproque du théorème de convergence dominée nécessite de passer à une sous-suite.