---

**Fiche 5**
INTÉGRALES À PARAMÈTRES

---

**Exercice # 1.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ intégrable au sens de Lebesgue. Montrer que la *transformée de Fourier de $f$*, définie par

$$\widehat{f}(t) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall\, t \in \mathbb{R},$$

est une fonction continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

**Exercice # 2** (transformée de Laplace)**.** Soit $f : [0, \infty[ \to \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée. Nous posons

$$F(t) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-xt} f(x)\,\mathrm{d}x,\ \forall\, t > 0\,;$$

c'est la *transformée de Laplace de $f$*. (La fonction $F$ est plus communément notée $\mathscr{L} f$.)

a) Montrer que $F$ est de classe $C^\infty$ sur $]0, \infty[$ et calculer $F^{(k)}$ pour tout $k \geq 1$.

b) Déduire de la question précédente la valeur de $\int_0^\infty x^k\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, $\forall\, k \geq 1$.

**Exercice # 3** (fonction zêta de Riemann)**.** La *fonction zêta de Riemann* est donnée par la formule

$$\zeta(s) := \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^s},\ \forall\, s > 1.$$

Montrer que $\zeta : ]1, \infty[ \to \mathbb{R}$ est de classe $C^\infty$.

**Exercice # 4.** a) Retrouver la théorie des séries entières à partir de la théorie de l'intégration. Plus précisément, soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombre réels (ou complexes). Soient

$$R := \sup\{r \geq 0\,;\ \lim_n a_n r^n = 0\}$$

et $I := ]-R, R[$. Posons $F(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$, $\forall\, x \in I$. Montrer que $F \in C^\infty(I)$ et que

$$\forall\, x \in I, \quad F^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

b) Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n\, n\, x^{n-1}$ pour tout $x \in ]-1, 1[$.

**Exercice # 5.** Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t}\,\mathrm{d}t$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $f$ est finie si et seulement si $x > 0$.

b) Montrer que $f$ est continue sur $]0, \infty[$.

c) Calculer $f(x) + f(x+1)$ pour $x > 0$. En déduire la valeur de $\lim_{x \searrow 0} x\, f(x)$.

**Exercice # 6.** Soit $f(t, x) := \dfrac{t-1}{\ln t}\, t^x$ pour $t \in ]0, 1[$ et $x \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que $F(x) := \int_0^1 f(t,x)\,\mathrm{d}t$ est finie si et seulement si $x > -1$.

b) Montrer que $F$ est dérivable sur $]-1,\infty[$ et calculer $F'(x)$.

c) Calculer $\lim_{x\to\infty} F(x)$. En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

**Exercice # 7.** a) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Notons $K$ sa somme.

b) Soit $f(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $]-1,1[$ et calculer $f'$.

c) Déterminer $f(x)$ et $\lim_{x\searrow -1} f(x)$.

d) En déduire la valeur de $K$.

**Exercice # 8.** Pour $x \geq 0$, soient

$$F(x) := \left(\int_0^x \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t\right)^2 \text{ et } G(x) := \int_0^1 \frac{\exp(-x^2(1+t^2))}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

a) Montrer que $F$ et $G$ sont de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Calculer $F'(x) + G'(x)$ pour $x \geq 0$.

c) En déduire la valeur de $I := \int_0^\infty \exp(-t^2)\,\mathrm{d}t$, ainsi que la valeur de $J := \int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t$.

**Exercice # 9.** Soit $I(\alpha) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln(1+\alpha x^2)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$, $\alpha \geq 0$.

a) Montrer que la fonction $I : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Donner une expression de $I'(\alpha)$ si $\alpha > 0$.

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$. Décomposer la fraction $\dfrac{x^2}{(1+x^2)(1+\alpha x^2)}$ en éléments simples. En déduire la valeur de $I'(\alpha)$ pour $\alpha > 0$.

d) Calculer $I(\alpha)$ pour $\alpha \geq 0$.

**Exercice # 10.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) := \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 \mathrm{e}^{-tx}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $f$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer $f''$ et les limites à l'infini de $f$ et $f'$.

c) En déduire une expression simple de $f$.

**Exercice # 11.** Soit $P$ une probabilité sur $(\mathbb{R}_+, \mathscr{B}_{\mathbb{R}_+})$.

a) Montrer que, pour tout $t \geq 0$, la fonction $x \mapsto \cos(xt)$ est $P$-intégrable sur $\mathbb{R}_+$. Soit

$$F(t) := \int_{\mathbb{R}_+} \cos(xt)\,\mathrm{d}P(x),\ \forall\, t \geq 0.$$

b) Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

c) Nous supposons que l'application $x \mapsto x^2$ est $P$-intégrable. Déterminer $\lim_{t\to 0} \dfrac{1-F(t)}{t^2}$.

(On pourra établir et utiliser l'inégalité $1 - \cos u \leq u^2/2$.)

d) « Réciproquement », supposons $\liminf_{t\to 0} \dfrac{1-F(t)}{t^2} < \infty$. Montrer que l'application $x \mapsto x^2$ est $P$-intégrable. (On pourra utiliser le lemme de Fatou.)

**Exercice # 12.** Pour $x \in \mathbb{R}$, soient $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ et $G(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{1-\cos(xt)}{t^2}\,\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

a) Montrer que $F$ et $G$ sont continues sur $\mathbb{R}$. Calculer $F(0)$ et $G(0)$.

b) Montrer que

$$F(0) - F(x) + G(x) = C\,|x|,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \text{où } C := \int_0^\infty \frac{\sin^2 t}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

c) (i) Montrer que $G$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}$ et que l'on a $G''(x) = F(x)$ pour tout réel $x$.

(ii) En utilisant la question b), en déduire que $F$ est de classe $C^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et est solution d'une équation différentielle du second ordre que l'on déterminera.

(iii) En déduire l'expression de $F(x)$ pour $x > 0$ (on pourra remarquer que la fonction $F$ est bornée sur $\mathbb{R}$). Calculer enfin $F(x)$ pour tout réel $x$.

d) Déduire de tout ceci la valeur de la constante $C$.

**Exercice # 13** (transformée de Fourier d'une gaussienne)**.** Soit $a > 0$. Soit $g_a(x) := \mathrm{e}^{-ax^2}$ pour $x \in \mathbb{R}$. Nous nous proposons de calculer la transformée de Fourier de $g_a$, donnée par $h_a(t) := \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}tx} g_a(x)\,\mathrm{d}x$, $\forall\, t \in \mathbb{R}$. Rappelons que $\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$.

a) Montrer que $g_a$ est intégrable au sens de Lebesgue et calculer $h_a(0)$.

b) Montrer que $h_a$ est de classe $C^1$ et donner une expression de sa dérivée $h_a'$.

c) En utilisant une intégration par parties, montrer que $h_a'(t) = (-t\, h_a(t))/(2a)$.

d) En déduire que $h_a(t) = \sqrt{\dfrac{\pi}{a}}\,\mathrm{e}^{-t^2/(4a)}$.

**Exercice # 14.** Soit $h_a$ la fonction de l'exercice précédent.
Soit $f(t) := \int_0^\infty \mathrm{e}^{-a\,t}\, h_a(t)\,\mathrm{d}a$. Montrer que $f$ est de classe $C^1$ sur $]0, \infty[$.

**Exercice # 15.** Pour $x \in \mathbb{R}$, soit $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{t^2} + t^2\right)\right)\,\mathrm{d}t$.

a) Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

c) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $F'(x) = -F(x)$.

d) En déduire la valeur de $F(x)$ pour $x$ réel.

**Exercice # 16.** Pour $x > 0$ et $t > 0$, soit $f(x,t) := \dfrac{\exp(-x) - \exp(-tx)}{x}$.

a) Montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^*$.
Pour $t > 0$, soit $F(t) := \int_0^\infty f(x,t)\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer que $F$ est continue sur $]0, \infty[$.

c) Montrer que $F$ est dérivable sur $]0, \infty[$.

d) Calculer $F'(t)$ et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t > 0$.

**Exercice # 17.** Pour $y \geq 0$, soit $F(y) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\exp(-x^2 y)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

b) Calculer $F(0)$ et déterminer $\lim\limits_{y\to\infty} F(y)$.

c) Montrer que $F$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que $F$ est solution sur $\mathbb{R}_+^*$ d'une équation différentielle du premier ordre s'exprimant à l'aide de $I := \int_0^\infty \exp(-x^2)\,\mathrm{d}x$.

e) En déduire, sous forme intégrale, une expression de $F(y)$ valable pour $y \geq 0$.

f) Pour finir, retrouver (une $n$-ième fois !) la valeur de $I$.

**Exercice # 18** (fonction gamma d'Euler)**.**

a) Montrer que pour tout $x > 0$, l'application $t \mapsto t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^*$. La *fonction gamma d'Euler* est définie par

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t,\ \forall\, x > 0.$$

b) Montrer que $\Gamma$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) Montrer que $\Gamma$ est de classe $C^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

d) Montrer que $\Gamma$ est strictement convexe.

**Exercice # 19.** Soit $F(t) := \displaystyle\int_{\mathbb{R}} \frac{\arctan(tx)}{x\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $F'(t)$, puis $F(t)$ .

b) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\arctan x}{x}\right)^2 \mathrm{d}x$.

**Exercice # 20.** Nous admettons la convergence de l'intégrale généralisée $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Pour tout $t \geq 0$, posons $S(t) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{x}\sin x\,\mathrm{d}x$.

a) Montrer que $S$ est de classe $C^1$ sur $]0,\infty[$ et calculer $S'(t)$ pour $t > 0$.

b) Déterminer $\lim\limits_{t\to\infty} S(t)$ et calculer $S(t)$ pour tout $t > 0$.

c) Soient $A > 0$ et $t > 0$.

   (i) Montrer que $\displaystyle\left|\int_A^\infty \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{2}{A}$.

   (ii) Prouver que, pour tout $A > 0$, on a $\displaystyle\lim_{t\searrow 0}\int_0^A \frac{\mathrm{e}^{-tx}\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$.

   (iii) En déduire la valeur de $I$.

**Exercice # 21** (extension harmonique)**.** Soit

$$U := \mathbb{R}\times\,]0,\infty[\, = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\ y > 0\}.$$

Si $(x,y) \in U$, soit $P_y(x) := \dfrac{1}{\pi}\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ; on appelle $P_y$ le *noyau de Poisson*. Si $f$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$, posons

$$u(x,y) := \int_{\mathbb{R}} P_y(x-t)\,f(t)\,\mathrm{d}t,\ \forall\,(x,y) \in U.$$

a) Montrer que $u$ est finie en tout point de $U$.

b) Montrer que $u$ est de classe $C^2$ sur $U$.

c) Montrer que $\Delta u = 0$, où $\Delta u(x,y) := \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ est le *laplacien*.

d) Si $f$ est continue et bornée, montrer que

$$\lim_{y\searrow 0} u(x,y) = f(x),\ \forall\, x\in\mathbb{R}.$$

Ainsi, la fonction $u$ est « la » (en fait, une) solution du *problème de Dirichlet*

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \mathbb{R}\times\,]0,\infty[\ ;\\ \lim_{y\searrow 0} u(x,y) = f(x), & \forall\, x\in\mathbb{R}. \end{cases}$$

Cette fonction $u$ est l'*extension harmonique* de $f$.

**Exercice # 22.** Posons $F(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$.

a) Déterminer l'ensemble $D := \{x\in\mathbb{R}\,;\ F(x)\in\mathbb{R}\}$. Montrer que $F$ est continue sur $D$.

b) Démontrer que $F$ est de classe $C^1$ sur $D$ et que

$$F'(x) = \int_1^\infty \frac{t^x \ln t}{(1+t^x)^2}\left(\frac{1}{t^2}-1\right)\mathrm{d}t,\ \forall\, x\in D.$$

En déduire le sens de variation de $F$.

c) Déterminer la limite à l'infini de $F$.

d) Calculer $\displaystyle\lim_{x\searrow 1}\int_1^\infty \frac{\mathrm{d}t}{1+t^x}$ et $\displaystyle\lim_{x\searrow 1} F(x)$.

**Exercice # 23.** Le but de cet exercice est de démontrer, pour tout $x>0$, l'identité

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\mathrm{d}t,$$

et d'en déduire (à nouveau !) la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t$.

a) Soit $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$, $\forall\, x\geq 0$.
   (i) Montrer que $f$ est bien définie et continue sur $[0,\infty[$.
   (ii) Montrer que $f$ est de classe $C^2$ sur $]0,\infty[$. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$ pour $x>0$.
   (iii) Montrer que $f(x)+f''(x) = \dfrac{1}{x}$, $\forall\, x>0$.

b) Soit $g(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin t}{x+t}\,\mathrm{d}t$, $\forall\, x\geq 0$. Rappelons que $g(0)$ existe (en tant qu'intégrale généralisée).
   (i) Montrer, par intégration par parties, que $g(x)$ existe pour tout $x>0$ (en tant qu'intégrale généralisée).
   (ii) Par un changement de variables, prouver pour $x>0$ l'identité

$$g(x) = \cos x\int_x^\infty \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u - \sin x\int_x^\infty \frac{\cos u}{u}\,\mathrm{d}u.$$

   (iii) Montrer que $g(x)$ est de classe $C^2$ sur $]0,\infty[$ et calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ pour $x>0$.
   (iv) Montrer que pour tout $x>0$, $g(x)+g''(x) = \dfrac{1}{x}$.

c) Dans cette partie, nous nous proposons de montrer l'égalité de $f$ et de $g$ sur $]0,\infty[$.

(i) Montrer que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ et que $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$.

(ii) À partir de l'équation différentielle du second ordre satisfaite par les deux fonctions, en déduire que $f(x) = g(x)$ pour $x > 0$.

d) Dans cette partie, nous nous proposons de trouver $g(0)$.

(i) Montrer que $\lim_{x\searrow 0} g(x) = g(0)$.

(ii) En déduire la valeur de $g(0)$.

**Exercice # 24** (continuité de l'intégrale définie)**.** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Lebesgue. Posons

$$F(x) := \begin{cases} \displaystyle\int_{[0,x]} f(t)\,\mathrm{d}t, & \text{si } x \geq 0 \\ \displaystyle -\int_{[x,0]} f(t)\,\mathrm{d}t, & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

a) Montrer que $F$ est continue sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que, si $f$ est continue en $1$, alors $F$ est dérivable en $1$ et $F'(1) = f(1)$.

c) De même si on suppose $f$ *localement intégrable*, c'est-à-dire que $f$ est (Lebesgue) mesurable et $\int_K |f(t)|\,\mathrm{d}t < \infty$ pour tout compact $K \subset \mathbb{R}$.