Fiche 6
MESURES PRODUIT

Notations

1. ν_n est la mesure de Lebesgue sur la tribu borélienne $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$.
2. λ_n est la mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue $\mathscr{L}_n$ de $\mathbb{R}^n$.
3. λ est la mesure de Lebesgue sur la tribu de Lebesgue $\mathscr{L}_1$ de $\mathbb{R}$ (donc $\lambda = \lambda_1$).

Exercice # 1. Soient X et Y deux ensembles a. p. d. et μ (respectivement ν) la mesure de comptage sur X (respectivement Y).

a) Montrer que $\mathscr{P}(X) \otimes \mathscr{P}(Y) = \mathscr{P}(X \times Y)$.
b) Montrer que $\mu \otimes \nu$ est la mesure de comptage sur $X \times Y$.

Exercice # 2. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) $\mathscr{T} \otimes \mathscr{S} = \{A \times B\,;\, A \in \mathscr{T}, B \in \mathscr{S}\}$.
b) $\mathscr{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathscr{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathscr{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.
c) $\mathscr{L}_n \otimes \mathscr{L}_m = \mathscr{L}_{n+m}$.
d) $\nu_n \otimes \nu_m = \nu_{n+m}$.
e) $\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m}$.
f) Soient $(X, \mathscr{T}, \mu)$ et $(Y, \mathscr{S}, \nu)$ des espaces mesurés, avec μ et ν σ-finies. Soit $E \in \mathscr{T} \otimes \mathscr{S}$. Si $\nu(E_x) = 0$ pour (presque) tout $x \in X$, alors $\mu \otimes \nu(E) = 0$.
g) Si μ et ν sont des mesures σ-finies, alors $\mu \otimes \nu$ est σ-finie.

Exercice # 3. Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

a) Dessiner le domaine D dans le plan et déterminer les « tranches » D_x et D^y, $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$.
b) Montrer que D est borélien.
c) Calculer l'aire de D et $\displaystyle\int_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exercice # 4. Calculer l'aire d'un disque.

Exercice # 5. Calculer $\displaystyle\int_{[0,1]^2} x\mathrm{e}^{xy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

Exercice # 6. Dans $\mathbb{R}^3$, nous considérons :

(i) la demi-boule fermée $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, z \geq 0,\ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$;
(ii) le cône plein $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq z^2\}$;
(iii) le cylindre plein $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3\,;\, 0 \leq z \leq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$.

En examinant les aires des coupes des ces trois solides à la hauteur z, retrouver l'*identité d'Archimède* :

$$\mathrm{vol}(C) = \mathrm{vol}(D) + \mathrm{vol}(K),$$

où « vol » désigne le volume d'un solide.

Vérifier cette identité à l'aide de formules connues.

Exercice # 7. Dans $\mathbb{R}^3$, calculer le volume d'un cylindre (plein), pas nécessairement circulaire ou droit, en fonction de l'aire de sa base et de sa hauteur. Généralisation à $\mathbb{R}^n$?

Exercice # 8. a) Montrer que, si $\mathscr{H}$ est une homothétie de rapport k dans $\mathbb{R}^n$, alors

$$\mu_n(\mathscr{H}(A)) = k^n \, \mu_n(A), \ \forall \, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}^n}.$$

b) Comme application, calculer le volume d'une pyramide dans $\mathbb{R}^3$ en fonction de l'aire de sa base et de sa hauteur.

c) Dans $\mathbb{R}^3$, deux pyramides qui ont la même base et la même hauteur ont le même volume.

d) Généralisation à d'autres formes et dimensions ?

Exercice # 9. Dans $\mathbb{R}^3$, on considère deux cylindres (pleins) circulaires droits infinis de rayon 1. Si les axes des cylindres sont concurrents et orthogonaux, calculer le volume de leur intersection.

Exercice # 10. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, soit $f(x, y) := y^x$. Soient a et b tels que $-1 < a < b$.

a) Montrer que f est λ_2-intégrable sur $[a, b] \times [0, 1]$.

b) Trouver la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y} \, \mathrm{d}y$.

Exercice # 11. Pour $y > 0$, soit $f_y(x, t) := \dfrac{1}{(1 + x^2t^2)(1 + y^2t^2)}$, avec $x, t \in \mathbb{R}$.

a) Montrer que f_y est λ_2-intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

b) Soit $g(y, t) := \displaystyle\int_0^1 f_y(x, t) \, \mathrm{d}x$. Montrer que g est λ_2-intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

c) Trouver la valeur de l'intégrale $I := \displaystyle\int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 \mathrm{d}t$.

Exercice # 12. a) Montrer que l'intégrale généralisée $I := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x$ existe et que $I = 2 \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} \, \mathrm{d}x$.

b) Calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$\int_{\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+} \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{(1 + y)(1 + x^2y)}.$$

En déduire que $I = \pi^2/4$.

c) Déduire de ce qui précède et d'un développement en série entière de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1 - x^2}$ que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n + 1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \text{ et } \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice # 13. En calculant de deux façons différentes l'intégrale

$$I := \int_0^\infty \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \sin(2xy) \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x} \frac{\sin^2 x}{x} \, \mathrm{d}x$.

Exercice # 14 (variables aléatoires indépendantes à densité)**.** Soit $(X, \mathscr{T}, P)$ un espace probabilisé. Soient $f, g : X \to \mathbb{R}$ deux variables aléatoires indépendantes (voir l'exercice 32 du TD4). Supposons que la loi $f_*P = P_f$ de f (respectivement la loi $g_*P = P_g$ de g) a la densité F (respectivement G) par rapport à ν_1 (voir les exercices 33 et 34 du TD4).

Soit

$$F \otimes G : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty], \ F \otimes G(x, y) := F(x) \, G(y), \ \forall \, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Nous considérons le couple $(f, g) : X \to \mathbb{R}^2$ (qui est un *vecteur aléatoire*, en langage probabiliste). Montrer que la loi $(f, g)_*P = P_{(f,g)}$ de (f, g) a la densité $F \otimes G$ par rapport à ν_2.

Exercice # 15 (transformée de Fourier d'une mesure)**.** Soit μ une mesure borélienne finie dans $\mathbb{R}$. La *transformée de Fourier de la mesure* μ est définie par

$$\varphi(t) := \int_{\mathbb{R}} \exp(-\mathrm{i}xt)\,\mathrm{d}\mu(x),\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

(En théorie des probabilités, on préfère la *fonction caractéristique de* μ, à savoir $\psi : t \mapsto \varphi(-t)$.)

a) Calculer φ dans les cas particuliers suivants :
   (i) $\mu = \delta_0$;
   (ii) $\mu(A) = \lambda_1(A \cap [0,1]), \forall\, A \in \mathscr{B}_{\mathbb{R}}$;
   (iii) μ est la mesure de densité $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

b) Montrer que la fonction φ est continue et bornée sur $\mathbb{R}$.

c) Soient $n \geq 1$ et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} \exp(\mathrm{i}ax)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} K_n(t-a)\,\mathrm{d}\mu(t),$$

où K_n est une fonction que l'on explicitera.

d) Déterminer $\lim_n \frac{1}{2n}\int_{-n}^{n} \exp(\mathrm{i}ax)\,\varphi(x)\,\mathrm{d}x$.

e) En déduire que, si $\lim_{|x|\to\infty} \varphi(x) = 0$, alors μ est une mesure diffuse.

f) Même conclusion si φ est intégrable au sens de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

Exercice # 16. Soit μ la mesure de comptage sur $([0,1], \mathscr{B}_{[0,1]})$.

a) Soit $\Delta := \big\{(x,x)\,;\, x \in [0,1]\big\}$. Est-ce que Δ est un borélien de $\mathbb{R}^2$? de $[0,1]^2$?

b) Justifier l'existence des intégrales itérées suivantes, et les calculer :

$$I_1 := \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y)\, d\lambda(x)\right) \mathrm{d}\mu(y)\ ;$$
$$I_2 := \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x,y)\, \mathrm{d}\mu(y)\right) d\lambda(x).$$

c) Quelle hypothèse d'un théorème important n'est pas satisfaite ?

Exercice # 17. a) Énoncer les hypothèses et les conclusions des théorèmes de Tonelli et Fubini pour la mesure de comptage sur $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

b) Soit

$$f : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{R},\ \ f(m,n) := \begin{cases} 1, & \text{si } n = m-1 \\ -1, & \text{si } n = m+1 \\ 0, & \text{si } n \neq m \pm 1 \end{cases}.$$

Calculer $\sum_n \sum_m f(m,n)$ et $\sum_m \sum_n f(m,n)$, et vérifier si les conditions du point précédent sont satisfaites.

Exercice # 18. Pour $(x,y) \in [-1,1]^2$, soit

$$f(x,y) := \begin{cases} (xy)/(x^2+y^2)^2, & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

a) Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.

b) La fonction f est-elle λ_2-intégrable sur $[-1,1]^2$?

Exercice # 19. Soient μ_1, μ_2 deux mesures boréliennes, σ-finies, non nulles, sur $\mathbb{R}$, telles que

$$\mu_1 \otimes \mu_2(\mathbb{R}^2 \backslash \Delta) = 0, \text{ où } \Delta := \big\{(x,x)\,;\, x \in \mathbb{R}\big\}.$$

L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ et $b_1, b_2 \in \,]0,\infty[$ tels que $\mu_1 = b_1\,\delta_a$ et $\mu_2 = b_2\,\delta_a$ (et réciproquement).

a) Montrer que si $A_1, A_2 \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$ sont tels que $\mu_1(A_1) > 0$ et $\mu_2(A_2) > 0$, alors $\mu_1 \otimes \mu_2(A_1 \times A_2) > 0$.

b) Avec A_1, A_2 comme ci-dessus, en déduire que $(A_1 \times A_2) \cap \Delta \neq \emptyset$, puis que $A_1 \cap A_2 \neq \emptyset$.

c) Soit $A \in \mathscr{B}_\mathbb{R}$ tel que $\mu_1(A) > 0$. En utilisant les questions précédentes, montrer que $\mu_2(\mathbb{R}\backslash A) = 0$, puis que $\mu_2(A) > 0$, et enfin que $\mu_1(\mathbb{R}\backslash A) = 0$.

d) Conclure en utilisant l'exercice 9 du TD3.

Exercice # 20. Soit μ la mesure de comptage sur $\mathbb{N}$, ν une mesure σ-finie sur X, et soient $f_n : X \to \mathbb{R}$ des fonction mesurables, $\forall\, n \in \mathbb{N}$. Soit $f(n,x) := f_n(x)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\forall\, x \in X$.

a) Quelles hypothèses supplémentaires doit-on ajouter pour pouvoir appliquer le théorème de Tonelli à $\mu \otimes \nu$ et à f, et quelle est l'identité obtenue ?

b) Quelles hypothèses supplémentaires doit-on ajouter pour appliquer le théorème de Fubini à $\mu\otimes\nu$ et à f, et quelle est l'identité obtenue ?

c) Les identités obtenues dans les deux questions précédentes restent-elles valides si ν n'est plus supposée σ-finie ?

Exercice # 21. Soient μ, ν deux probabilités sur $\mathscr{B}_\mathbb{R}$. Soient

$$F_\mu(t) := \mu\big(]t,\infty[\big),\ G_\mu(t) := \mu\big(]-\infty,t]\big),\ H_\mu(t) := \mu\big(\{t\}\big),\ \forall\, t \in \mathbb{R}.$$

On définit de manière analogue F_ν, G_ν et H_ν.

a) Montrer que les fonctions F_μ, G_μ et H_μ sont boréliennes.

b) Montrer que $\displaystyle\int_\mathbb{R} F_\mu\, d\nu = \int_\mathbb{R} (G_\nu - H_\nu)\,\mathrm{d}\mu$.

c) Soient $D_\mu := \{t \in \mathbb{R}\,;\, H_\mu(t) \neq 0\}$ et $D_\nu := \{t \in \mathbb{R}\,;\, H_\nu(t) \neq 0\}$.

   (i) Expliquer pourquoi les ensembles D_μ et D_ν sont a. p. d.

   (ii) Montrer l'égalité suivante :

$$\int_\mathbb{R} F_\mu\, d\nu + \int_\mathbb{R} F_\nu\,\mathrm{d}\mu + \sum_{t \in D_\mu \cap D_\nu} H_\mu(t)\, H_\nu(t) = 1.$$

Exercice # 22. Soit μ une mesure borélienne finie dans $\mathbb{R}$. Soit

$$H_\mu(x,y) := \frac{1}{\pi}\int_\mathbb{R} \frac{y}{y^2 + (x-t)^2}\,\mathrm{d}\mu(t),\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, y > 0.$$

Par analogie avec l'exercice 21 de la feuille de TD5, H_μ est l'*extension harmonique de* μ.

Le but de cet exercice est de montrer que si $H_\mu = H_\nu$, alors $\mu = \nu$.

a) Montrer que H_μ est continue.

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $\displaystyle\lim_{y \searrow 0} y\, H_\mu(x,y)$.

c) Soient $a < b$ deux réels. Déterminer $\displaystyle\lim_{y \searrow 0} \int_a^b H_\mu(x,y)\,\mathrm{d}x$.

d) Soit ν une autre mesure borélienne finie dans $\mathbb{R}$. On suppose que $H_\mu = H_\nu$. Montrer que $\mu = \nu$.