

Fiche 7
CHANGEMENT DE VARIABLES

Notations

- a) Pour $x > 0$, $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \in]0, \infty[$ (c'est la *fonction Gamma d'Euler*).
- b) ν_n est la mesure de Lebesgue sur les boréliens de \mathbb{R}^n .
- c) λ_n est la mesure de Lebesgue (complète) dans \mathbb{R}^n .

Exercice # 1. On demande de calculer

$$I := \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \cos^2 x}.$$

Voici une « solution ».

$$I = \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \frac{1}{1 + \tan^2 x}} = \int_0^\pi \frac{1 + \tan^2 x}{2 + \tan^2 x} dx.$$

En posant $t := \tan x$, nous avons $dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx = (1 + \tan^2 x) dx$, d'où

$$I = \int_{\tan 0}^{\tan \pi} \frac{dt}{2 + t^2} = \int_0^0 \frac{dt}{2 + t^2} = 0.$$

- a) Pourquoi est-ce manifestement faux?
- b) Où est l'erreur de raisonnement?
- c) Quelle est la valeur de I ?

Exercice # 2. Vrai ou faux. Si $\Phi :]a, b[\rightarrow]c, d[$ est un C^1 -difféomorphisme et $f :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ est mesurable, alors

$$\int_c^d f(x) dx = \int_a^b f(\Phi(y)) \Phi'(y) dy$$

au sens du théorème de changement de variables.

Exercice # 3. (Fonction Bêta d'Euler)

- a) Montrer que, $\forall x > 0, \forall y > 0$, l'application $t \rightarrow t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est λ_1 -intégrable sur $]0, 1[$.
La *fonction Bêta d'Euler* est définie par

$$B(x, y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1} dt, \forall x, y > 0.$$

- b) Soient $x > 0, y > 0$ et $I := \int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} s^{x-1} \sigma^{y-1} e^{-(s+\sigma)} ds d\sigma$. Calculer I en utilisant le changement de variables dans $\mathbb{R}^2 : u = \sigma$ et $v = s + \sigma$.
- c) En calculant I d'une autre manière, établir, pour $x, y > 0$, l'identité

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x) \Gamma(y)}{\Gamma(x + y)}. \tag{1}$$

Exercice # 4. a) Soit $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $H(u, v) := (s, \sigma)$, avec $s := uv$ et $\sigma := u(1 - v)$. Montrer que H est un C^1 -difféomorphisme de l'ouvert $U =]0, \infty[\times]0, 1[$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Calculer l'intégrale I de l'exercice précédent en utilisant le changement de variables H , et retrouver l'identité (1).

Exercice # 5. a) Calculer $\int_{\Delta} \frac{1}{1 + x^2 + y^2} dx dy$, où $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x, y \leq 1, 0 < x^2 + y^2 \leq 1\}$.

b) Calculer l'aire de $D := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1; x \geq 0, y \geq 0 \right\}$ (avec $a, b > 0$ paramètres).

c) Calculer $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$.

d) Soient $a, b > 1$. Calculer l'aire de B , où B est l'ouvert délimité par les courbes d'équation $y = ax$, $y = x/a$, $y = b/x$ et $y = 1/(bx)$ et contenant le point $(1, 1)$.

Exercice # 6. Pour $n \geq 1$, soit $U_n := \{x \in \mathbb{R}^n; x_1 > 0, \dots, x_n > 0, x_1 + \dots + x_n < 1\}$. Soit $S_n := \lambda_n(U_n)$. Etablir une relation entre S_n et S_{n-1} . En déduire la valeur de S_n .

Exercice # 7. Soient $0 \leq a < b$. Soit

$$D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 0 < x < y < \sqrt{x^2 + 1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

a) Montrer que D est un borélien.

b) À l'aide du changement de variables $u := y^2 - x^2$, $v := xy$, que l'on justifiera, calculer l'intégrale $I := \int_D (y^2 - x^2)^{xy} (x^2 + y^2) dx dy$ en fonction de a et b .

Exercice # 8. Soit U la partie de \mathbb{R}^3 définie par

$$U := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3; u > 0, v > 0, w > 0, uv < 1, uw < 1, vw < 1\}.$$

a) Montrer que U est borélien.

b) Calculer $I := \int_U u v w du dv dw$. On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le changement de variables suivant :

$$(x, y, z) = \Phi(u, v, w) := (\sqrt{vw}, \sqrt{wu}, \sqrt{uv}).$$

Exercice # 9. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Pour $a, b, c > 0$ fixés, soit

$$I_{a,b,c} := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^3} x^{a-1} y^{b-1} z^{c-1} f(x + y + z) dx dy dz.$$

a) Soit $(x, y, z) \xrightarrow{H} (u, v, w)$, où $u := x + y + z$, $v := \frac{x}{x + y}$ et $w := \frac{x + y}{x + y + z}$. Montrer que H est un C^1 -difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ sur un ouvert U de \mathbb{R}^3 que l'on déterminera.

b) En utilisant H et la formule (1), en déduire que

$$I_{a,b,c} = \frac{\Gamma(a) \Gamma(b) \Gamma(c)}{\Gamma(a + b + c)} \int_0^\infty u^{a+b+c-1} f(u) du. \quad (2)$$

Exercice # 10. Soient $\alpha, \beta, \gamma > 0$. Soit

$$J := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^3} \frac{dx dy dz}{1 + x^\alpha + y^\beta + z^\gamma}.$$

A quelle condition sur α, β, γ , l'intégrale J est-elle finie?

Trouver la réponse de deux façons différentes :

- a) En utilisant le théorème de Tonelli.
 b) En utilisant (2).

Exercice # 11. Soit $B := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$.

- a) Calculer

$$L := \int_B |x|^{a-1} |y|^{b-1} |z|^{c-1} dx dy dz :$$

- (a) En utilisant les coordonnées sphériques.
 (b) En utilisant (2).
 b) Que retrouve-t-on dans le cas $a = b = c = 1$?

Exercice # 12. Rappelons que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Soit

$$H_a(x) := \int_0^\infty e^{-(at^2 + x/t^2)} dt, \forall a > 0, \forall x \geq 0.$$

- a) Montrer que la fonction $H_a : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est continue.
 b) Calculer $H_a(0)$.
 c) Montrer que la fonction H_a est dérivable sur $]0, \infty[$.
 d) Calculer, pour $x > 0$, $H'_a(x)$ en fonction de $H_a(x)$. Indication : utiliser le changement de variable $t := \frac{\alpha}{s}$, avec α convenablement choisi.
 e) En déduire que

$$H_a(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ax}}, \forall a > 0, \forall x \geq 0. \quad (3)$$

Exercice # 13. Pour $\alpha > 0$, soit

$$J(\alpha) := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} e^{-(xy^2 + x/y^2)} x^{\alpha-1/2} dx dy.$$

- a) En utilisant (3), montrer que $J(\alpha) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}} \Gamma(\alpha)$.
 b) En utilisant le changement de variables $u := xy^2, v := x/y^2$, que l'on justifiera, montrer que

$$J(\alpha) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

- c) En déduire la formule $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}} \Gamma(\alpha), \alpha > 0$.

Exercice # 14. Rappelons que la fonction *cosinus hyperbolique* est définie par $\cosh x := \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

- a) Nous considérons les intégrales suivantes

$$A := \int_{\mathbb{R}_+^2} \frac{ds dt}{\cosh s + \cosh t}, \quad B := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{ds dt}{\cosh s + \cosh t}, \quad C := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{du dv}{\cosh u \cosh v}.$$

- (i) Vérifier que $B = 4A$ et $C = \pi^2$.
 (ii) En utilisant le changement de variables $s := u - v, t := u + v$, calculer B , puis A .
 b) Soit $H : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, définie par $H(x) := \int_0^\infty \exp(-x \cosh t) dt$.

- (i) Démontrer que H est décroissante et continue sur $]0, \infty[$. Déterminer les limites de H en 0 et à l'infini.
- (ii) Montrer que $\int_0^\infty H(x) dx = \pi/2$.
- (iii) En utilisant l'intégrale A , montrer que $\int_0^\infty [H(x)]^2 dx = \pi^2/4$.

Exercice # 15. Soit $J := \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dx dy}{1 - xy}$.

- a) Montrer que $J = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$.
- b) Effectuer le changement de variables $x := u - v$ et $y := u + v$ et en déduire que

$$J = \int_Q \frac{2 du dv}{1 - u^2 + v^2},$$

où Q est un quadrilatère du plan que l'on déterminera.

- c) Effectuer le changement de variable $u := \cos t$ et en déduire que $J = \pi^2/6$. Rappels : $\frac{1 - \cos t}{\sin t} = \tan(t/2)$, $\forall t \in \mathbb{R} \setminus \pi \mathbb{Z}$, et $\arctan(z) + \arctan(1/z) = \pi/2$, $\forall z \in \mathbb{R}$.

Exercice # 16. (Théorème du changement de variable dans \mathbb{R}) Soit $\Phi :]a, b[\rightarrow]c, d[$, avec $]a, b[$, $]c, d[\subset \mathbb{R}$. Nous supposons Φ un C^1 -difféomorphisme, c'est-à-dire : $\Phi \in C^1$, Φ bijectif et $\Phi'(x) \neq 0$, $\forall x \in]a, b[$.

- a) Montrer que Φ' est de signe constant sur $]a, b[$.
 Dans la suite nous supposons $\Phi'(x) > 0$, $\forall x \in]a, b[$. Nous nous proposons de montrer la validité du théorème du changement de variable : si $f :]c, d[\rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne et si $g(y) := f(\Phi(y)) \Phi'(y)$, $\forall y \in]a, b[$, alors f a une intégrale de Lebesgue si et seulement si g en a une et dans ce cas

$$\int_{]c, d[} f d\nu_1 = \int_{]a, b[} g d\nu_1, \text{ ou encore } \int_c^d f(x) dx = \int_a^b f(\Phi(y)) \Phi'(y) dy. \quad (4)$$

- b) Montrer la validité de (4) si $f := \chi_I$, avec $I \subset]c, d[$ intervalle.
- c) En déduire que (4) est vraie si $f = \chi_B$, avec $B \in \mathcal{B}_{]c, d[}$. Indication : classe monotone.
- d) En déduire que (4) est vraie si f est borélienne positive.
- e) Conclure.
- f) Et si f est Lebesgue mesurable?
- g) Et si $\Phi'(x) < 0$, $\forall x \in]a, b[$?

Exercice # 17. Soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ deux fonctions Lebesgue mesurables. Nous nous proposons de montrer l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x - y) g(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) g(x - y) dy, \quad \forall x \in \mathbb{R}^n. \quad (5)$$

- a) Donner un sens à l'égalité (5).
- b) La justifier.

Exercice # 18. Soit $\|\cdot\|$ la norme euclidienne standard sur \mathbb{R}^n . Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ une fonction borélienne.

- a) Nous nous proposons de montrer qu'il existe une constante $C \in]0, \infty[$ (dépendant uniquement de n , en particulier indépendante de f) telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|) dx = C \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr. \quad (6)$$

- (i) Donner un sens à l'égalité (6).
- (ii) La justifier (pour C convenable).

b) En calculant de deux façons différentes $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2} dx$, montrer que $C = \frac{2 \pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$.

c) Calculer, en fonction de la fonction Γ , le volume de la boule euclidienne unité.

Exercice # 19. Soit $\| \cdot \|$ une norme quelconque sur \mathbb{R}^n . Nous nous proposons de trouver un analogue de l'égalité (6) de l'exercice précédent pour le calcul de l'intégrale $\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|) dx$, où $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne.

a) Supposons d'abord $f \geq 0$. En utilisant les coordonnées sphériques, montrer l'existence d'une constante $C' \in]0, \infty[$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(\|x\|) dx = C' \int_0^\infty r^{n-1} f(r) dr. \quad (7)$$

b) Montrer que (7) reste encore vraie (dans un sens à expliquer) si f n'est plus supposée positive.

c) Soient $U := \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| > 1\}$ et $a \in \mathbb{R}$. Quelle est la nature de $\int_U \|x\|^{-a} dx$?

Exercice # 20. Soit $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$. Montrer l'égalité

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}} f(x - 1/x) dx.$$

Exercice # 21. Pour toute fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne et bornée, soit

$$I(F) := \int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x+y)}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} dx dy.$$

- a) Montrer que $I(F)$ est bien définie.
- b) Calculer $I(F)$ si $F(x) := \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- c) Montrer, en utilisant un changement de variables, que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{F(x+y)}{\pi^2(1+x^2)(1+y^2)} dx dy = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{F(z)}{\pi(4+z^2)} dz.$$

d) Soit $F_\lambda(x) := \cos(\lambda x), \forall x \in \mathbb{R}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$ paramètre. Soit $G(\lambda) := I(F_\lambda)$. Écrire G comme la transformée de Fourier d'une fonction que l'on précisera.

e) Montrer que, pour toute fonction $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne et bornée, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^2} F\left(\frac{x}{y}\right) e^{-x^2/2-y^2/2} dx dy = 2 \int_{\mathbb{R}} \frac{F(z)}{1+z^2} dz.$$