Mesure et intégration
Examen terminal du 06/01/2025
Corrigé.

Exercice 1

a) Les fonctions $x \mapsto x^{2n}(1-x)$ sont positives (et boréliennes car continues) donc on peut permuter $\sum_n$ et $\int_0^1$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}(1-x)\,dx$$

$$= \int_0^1 (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n \,dx$$

Or $\sum_{n=0}^{\infty} (x^2)^n = \begin{cases} \frac{1}{1-x^2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ +\infty & \text{si } x = 1 \end{cases}$

d'où $$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)(x^2)^n = \begin{cases} \frac{1-x}{1-x^2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1+x} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

$$= \frac{1}{1+x} \quad \text{p.p.}$$

On a bien que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx$$

b) On a

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2$$

d'où

$$\ln 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 x^{2n} - \int_0^1 x^{2n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

En décomposant $\mathbb{N} = \bigcup_{n\geq 0} \{2n, 2n+1\}$ on peut écrire

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{n\geq 0} \sum_{k=2n}^{2n+1} \frac{(-1)^k}{k+1}$$

$$= \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2}\right)$$

$$= \ln 2.$$

<u>Remarque</u> : La convergence de la série $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$ est une conséquence du critère des séries alternées.

Exercice 2

a) $$\mu(\{0\}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \underbrace{\delta_{2^n}(\{0\})}_{=0} = 0$$

$$\mu(\{1\}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \delta_{2^n}(\{1\}) = a^0 = 1$$

$$\delta_{2^n}(\{1\}) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2^n = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu([0,1]) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \delta_{2^n}([0,1]) = 1$$

$$\delta_{2^n}([0,1]) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2^n \in [0,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mu(\mathbb{R}_+) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \delta_{2^n}(\mathbb{R}_+) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n = \begin{cases} \frac{1}{1-a} & \text{si } a < 1 \\ +\infty & \text{si } a \geq 1 \end{cases}$$

$$\delta_{2^n}(\mathbb{R}_+) = \begin{cases} 1 & \text{si } 2^n \in \mathbb{R}_+ \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} = 1$$

b) Soit $A = \{x \in \mathbb{R}_+ \,;\, f(x) \neq g(x)\}$.

On doit montrer que $\mu(A) = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $$g(2^n) = \sum_{k=0}^{\infty} f(2^k) \chi_{\{2^k\}}(2^n) = f(2^n)$$

donc $A \subset \mathbb{R}_+ \setminus \{2^n, n \in \mathbb{N}\} =: B$

Or, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\delta_{2^k}(\mathbb{R}_+ \setminus \{2^k\}) = 0$

donc $\delta_{2^k}(B) \leq \delta_{2^k}(\mathbb{R}_+ \setminus \{2^k\}) = 0$

$\Rightarrow \delta_{2^k}(B) = 0$

Alors $\mu(B) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \delta_{2^k}(B) = 0$

d'où $0 \leq \mu(A) \leq \mu(B) = 0$ implique $\mu(A) = 0$.

c) Les 3 premières fonctions sont positives et continues donc mesurables, donc les intégrales sont bien définies. En utilisant b) et le fait que deux fonctions égales p.p. ont la même intégrale, on peut écrire pour $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurabl

$$\int_{\mathbb{R}_+} f(x)\, d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}_+} \sum_{k=0}^{\infty} f(2^k)\, \chi_{\{2^k\}}(x)\, d\mu(x)$$

$$\underset{\text{car fonctions positives}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}_+} f(2^k)\, \chi_{\{2^k\}}(x)\, d\mu(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(2^k)\, \mu(\{2^k\}) \qquad \left(\text{car } \int \chi_A\, d\mu = \mu(A)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(2^k) \left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n \underbrace{\delta_{2^n}(\{2^k\})}_{= \begin{cases} 1 & \text{si } k = n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}} \right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f(2^k)\, a^k$$

On applique cette formule pour $1 = \chi_{[0,1]}$, x et $\frac{1}{x}$: (5)

$$\int_{\mathbb{R}_+} \chi_{[0,1]}(x)\, d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \chi_{[0,1]}(2^k) a^k = 1$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} x \, d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^k a^k = \sum_{k=0}^{\infty} (2a)^k$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-2a} & \text{si } a < \frac{1}{2} \\ +\infty & \text{si } a \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{x} \, d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} a^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{2}\right)^k$$

$$= \begin{cases} \frac{2}{2-a} & \text{si } a < 2 \\ +\infty & \text{si } a \geq 2 \end{cases}$$

Enfin, la fonction $x \longmapsto \sin(\pi x)$ n'étant pas positive, il faut vérifier si elle est dans $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mu)$ ou pas. On calcule

$$\int_{\mathbb{R}_+} |\sin(\pi x)|\, d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} |\underbrace{\sin(2^k \pi)}_{=0}|\, a^k$$

$$= 0$$

Donc $\sin(\pi x) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}_+, \mu)$ et de plus est nulle μ-presque partout. L'intégrale $\int_{\mathbb{R}_+} \sin(\pi x)\, d\mu(x)$ est donc bien définie et $= 0$.

Exercice 3 Nous avons

$$I = \int_0^\infty e^{-x} \left(\int_0^1 \sin(2xy)\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} \left(- \frac{\cos(2xy)}{2x} \right) \Bigg|_{y=0}^{y=1} dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} \frac{1 - \cos(2x)}{2x}\, dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx$$

Nous allons appliquer le théorème de Fubini. L'intégrande n'étant pas positive, nous allons vérifier qu'elle appartient à $\mathcal{L}^1(dx\, dy)$ (elle est continue donc mesurable)

On a: $\int_0^\infty \int_0^1 \left| e^{-x} \sin(2xy) \right| dx\, dy$

$$\leq \int_0^\infty \int_0^1 e^{-x}\, dx\, dy = \int_0^\infty e^{-x} \left(\int_0^1 1\, dy \right) dx$$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\, dx = -e^{-x} \Big|_0^\infty = 1 < \infty$$

On peut donc appliquer le th. de Fubini pour écrire

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^\infty e^{-x} \sin(2xy)\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \left(\int_0^\infty e^{-x} \operatorname{Im}\left(e^{2ixy}\right) dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\int_0^\infty e^{-x} e^{ixy}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\int_0^\infty e^{x(2iy-1)}\, dx \right) dy$$

$$= \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\frac{e^{x(2iy-1)}}{2iy-1} \Bigg|_{x=0}^{x=\infty} \right) dy$$

$$= \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\frac{1}{1-2iy}\right) dy = \int_0^1 \operatorname{Im}\left(\frac{1+2iy}{1+4y^2}\right) dy$$

$$= \int_0^1 \frac{2y}{1+4y^2}\, dy = \frac{1}{4} \ln(1+4y^2) \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{4} \ln 5 .$$

Conclusion:

$$\int_0^\infty e^{-x} \frac{\sin^2 x}{x}\, dx = \frac{1}{4} \ln 5$$

Exercice 4 :

a) f_x est continue donc mesurable. Puis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f_x(t)|\, dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} |\cos(tx)|\, dt$$

$$\leq \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt < \infty.$$

(car cont et décroissance exponentielle en $\pm\infty$).

Donc $f_x \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$.

b) On a

- $\forall x$, $t \to f_x(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, cf. a)
- $\forall t$, $x \to f_x(t)$ est C^1 et

$$\frac{d}{dx}(f_x(t)) = -t e^{-t^2} \sin(tx)$$

$$\left| \frac{d}{dx}(f_x(t)) \right| = |t| e^{-t^2} |\sin(tx)|$$

$$\leq |t| e^{-t^2}$$

Or $|t| e^{-t^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ $\left(\text{car } \int_{\mathbb{R}} |t| e^{-t^2} = 2\int_0^{\infty} t e^{-t^2} = -e^{-t^2}\Big|_0^{\infty} = 1 < \infty\right)$

et ne dépend pas de x.

Par le th. du cours sur la dérivabilité des intégrales à paramètre, il vient que $F \in C^1(\mathbb{R})$

et $F'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d}{dx}\left(f_x(t)\right) dt$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -t\, e^{-t^2} \sin(tx)\, dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{e^{-t^2}}{2}\right)' \sin(tx)\, dt$$

$$\overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{2} e^{-t^2} \sin(tx) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{2}\, x \cos(tx)\, dt$$

$$= -\frac{x}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \cos(tx)\, dt$$

$$= -\frac{x}{2} F(x).$$

c) L'intégrande étant $\overbrace{\text{positive}}^{\text{et borélienne car continue}}$, on peut écrire par le théorème de Fubini-Tonelli

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2} e^{-y^2}\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx\right)^2$$

d) On note $M = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx$.

Par c) on a

$$M^2 = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)}\, dx\, dy$$

$$\overset{\text{passage en polaire}}{=} \int_0^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-r^2}\, 2\pi\, r\, dr$$

$$= \pi \left(-e^{-r^2}\right)\Big|_0^{\infty}$$

$$= \pi$$

D'où $M = \sqrt{\pi}$.

e) Par b) $F' = -\frac{x}{2} F \iff F' + \frac{x}{2} F = 0$

$$\iff e^{\frac{x^2}{4}}\left(F' + \frac{x}{2} F\right) = 0 \iff \left(F e^{\frac{x^2}{4}}\right)' = 0$$

$$\iff F e^{\frac{x^2}{4}} = C \iff F = C e^{-\frac{x^2}{4}}$$

On pose $x = 0 \Rightarrow F(0) = C$. Or

$$F(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt \overset{d)}{=} \sqrt{\pi} \Rightarrow C = \sqrt{\pi}$$

$$\Rightarrow \boxed{F(x) = \sqrt{\pi}\, e^{-\frac{x^2}{4}}}$$