Licence de Mathématiques, 3^{e} année, parcours « Mathématiques générales »
Examen terminal – Lundi 6 janvier 2025 – Durée : 2 h
Mesure et intégration

Le matériel électronique (smartphone, calculatrice, etc.) et les documents sont interdits.

Questions de cours.

a) Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable. Donner la définition d'une mesure positive μ définie sur $\mathscr{M}$.

b) Soit $(X,\mathscr{M},\mu)$ un espace mesuré où μ est une mesure positive et soit $f : X \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Que signifie l'affirmation « f est nulle μ-presque partout » ?

c) Soit $(X,\mathscr{M})$ un espace mesurable et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesures positives. Montrer que l'application $\mathscr{M} \ni A \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$ définit une mesure sur $(X,\mathscr{M})$. Énoncez clairement les diverses propriétés que vous utilisez.

Exercice 1.

a) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 x^{2n}(1-x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x.$$

b) En déduire la valeur de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

Exercice 2.

Soit $a>0$. On considère la mesure μ sur $(\mathbb{R}_+,\mathscr{B}(\mathbb{R}_+))$ définie par

$$\mu = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \delta_{2^n} = \delta_1 + a\delta_2 + a^2\delta_4 + a^3\delta_8 + \cdots$$

Ici $\mathbb{R}_+ = [0,+\infty[$. On désigne par χ_A la fonction indicatrice de l'ensemble A.

a) Calculer en fonction de a les mesures des ensembles suivants : $\mu(\{0\})$, $\mu(\{1\})$, $\mu([0,1])$, $\mu(\mathbb{R}_+)$.

b) Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ mesurable. Justifier que les fonctions f et $g : x \mapsto \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} f(2^k)\chi_{\{2^k\}}(x)$ sont égales μ-presque partout.

c) Les intégrales suivantes sont-elles bien définies ? Si oui, les calculer en fonction de a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \chi_{[0,1]}(x)\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad \int_{\mathbb{R}_+} x\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}\mu(x), \qquad \int_{\mathbb{R}_+} \sin(\pi x)\,\mathrm{d}\mu(x).$$

Ici, on attribue la valeur $+\infty$ à la fonction $\dfrac{1}{x}$ lorsque $x=0$.

Exercice 3.

En calculant de deux façons différentes l'intégrale

$$I = \int_0^{\infty} \left(\int_0^1 \mathrm{e}^{-x} \sin(2xy)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x,$$

déterminer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-x} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 4.

a) Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Montrer que l'application $f_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_x(t) = \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx)$ est Lebesgue-intégrable sur $\mathbb{R}$.

On notera dans la suite, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos(tx)\, \mathrm{d}t.$$

b) Montrer que F est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que $F'(x) = -\frac{x}{2} F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) Soit $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$, $h(x,y) = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$. Montrer, après avoir justifié l'existence, que

$$\int_{\mathbb{R}^2} h(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u \right)^2.$$

d) À l'aide d'un changement de coordonnées polaires, montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\, \mathrm{d}u = \sqrt{\pi}.$$

e) En déduire que $F(x) = \sqrt{\pi}\, \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.