

Fiche 10
Mesures produit.

Exercice 1. Soit $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1\}$.

- Dessiner le domaine D dans le plan et déterminer $D(x, \cdot)$ et $D(\cdot, y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.
- Montrer que D est borélien.
- Calculer l'aire de D et $\int_D (x^2 + y^2) dx dy$.

Exercice 2. Calculer l'aire d'un disque.

Exercice 3. Calculer $\int_{[0,1]^2} x e^{xy} dx dy$.

Exercice 4. Dans $\mathbb{R}^3$, nous considérons :

- La demi-boule fermée $D := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.
- Le cône plein $K := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq z^2\}$.
- Le cylindre plein $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

En examinant les aires des coupes des ces trois solides à la hauteur z , retrouver l'identité d'Archimède :

$$\text{vol}(C) = \text{vol}(D) + \text{vol}(K),$$

« vol » désignant le volume d'un solide.

Vérifier cette identité à l'aide de formules connues.

Exercice 5. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $y > 0$, soit $f(x, y) := y^x$. Soient a et b tels que $-1 < a < b$.

- Montrer que f est Lebesgue intégrable sur $[a, b] \times [0, 1]$.
- Trouver la valeur de l'intégrale $I := \int_0^1 \frac{y^b - y^a}{\ln y} dy$.

Exercice 6. Soient X, Y a. p. d., et μ , respectivement ν , la mesure de comptage sur X , respectivement Y .

- Montrer que $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$.
- Montrer que $\mu \otimes \nu$ est la mesure de comptage sur $X \times Y$.

Exercice 7. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

- $\mathcal{M} \otimes \mathcal{S} = \{A \times B; A \in \mathcal{M}, B \in \mathcal{S}\}$.
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{n+m}}$.
- $\mathcal{L}_n \otimes \mathcal{L}_m = \mathcal{L}_{n+m}$.
- $\nu_n \otimes \nu_m = \nu_{n+m}$.
- $\lambda_n \otimes \lambda_m = \lambda_{n+m}$.
- Soient $(X, \mathcal{M}, \mu)$ et $(Y, \mathcal{S}, \nu)$ des espaces mesurés, avec μ et ν σ -finies. Soit $E \in \mathcal{M} \otimes \mathcal{S}$. Si $\nu(E_x) = 0$ pour (presque) tout $x \in X$, alors $\mu \otimes \nu(E) = 0$.
- Si μ et ν sont des mesures σ -finies, alors $\mu \otimes \nu$ est σ -finie.

Exercice 8. Pour $y > 0$, soit $f_y(x, t) := \frac{1}{(1 + x^2 t^2)(1 + y^2 t^2)}$, avec $x, t \in \mathbb{R}$.

- Montrer que f_y est Lebesgue intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.
- Soit $g(y, t) := \int_0^1 f_y(x, t) dx$. Montrer que g est Lebesgue intégrable sur $[0, 1] \times \mathbb{R}_+$.

c) Trouver la valeur de l'intégrale $I := \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t} \right)^2 dt$.

Exercice 9. Soit μ la mesure de comptage sur $([0, 1], \mathcal{B}_{[0,1]})$.

- a) Soit $\Delta := \{(x, x) ; x \in [0, 1]\}$. Δ est-il un borélien de $\mathbb{R}^2$? De $[0, 1]^2$?
b) Justifier l'existence des intégrales itérées suivantes, et les calculer.

$$I_1 := \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x, y) d\lambda(x) \right) d\mu(y),$$

$$I_2 := \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \chi_\Delta(x, y) d\mu(y) \right) d\lambda(x).$$

c) Quelle hypothèse d'un théorème important n'est pas satisfaite?

Exercice 10. Pour $(x, y) \in [-1, 1]^2$, soit

$$f(x, y) := \begin{cases} (xy)/(x^2 + y^2)^2, & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

- a) Montrer que les intégrales itérées de f existent et sont égales.
b) La fonction f est-elle Lebesgue intégrable sur $[-1, 1]^2$?