Fiche 12
Changements de variables.

Exercice 1. (Fonction Bêta d'Euler)

a) Montrer que, $\forall\, x > 0, \forall\, y > 0$, l'application $t \to t^{x-1}(1-t)^{y-1}$ est Lebesgue intégrable sur $]0,1[$.

La *fonction Bêta d'Euler* est définie par

$$B(x,y) := \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\, dt, \ \forall\, x, y > 0.$$

b) Soient $x > 0, y > 0$ et $I := \displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*} s^{x-1}\, \sigma^{y-1}\, e^{-(s+\sigma)}\, ds d\sigma$. Calculer I en utilisant le changement de variables dans $\mathbb{R}^2$: $u = \sigma$ et $v = s + \sigma$.

c) En calculant I d'une autre manière, établir, pour $x, y > 0$, l'identité

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}, \tag{1}$$

où Γ est la fonction Gamma d'Euler définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \qquad \forall x > 0.$$

Exercice 2. a) Soit $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $H(u,v) := (s, \sigma)$, avec $s := uv$ et $\sigma := u(1-v)$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de l'ouvert $U =]0,\infty[\times]0,1[$ sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

b) Calculer l'intégrale I de l'exercice précédent en utilisant le changement de variables H, et retrouver l'identité (1).

Exercice 3. a) Calculer $\displaystyle\int_\Delta \frac{1}{1+x^2+y^2}\, dxdy$, où $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 \le x, y \le 1,\ 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$.

b) Calculer l'aire de $D := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \le 1;\ x \ge 0,\ y \ge 0\right\}$ (avec $a, b > 0$ paramètres).

c) Calculer $\int_D (x^2 + y^2)\, dxdy$.

d) Soient $a, b > 1$. Calculer l'aire de B, où B est l'ouvert délimité par les courbes d'équation $y = ax$, $y = x/a$, $y = b/x$ et $y = 1/(bx)$ et contenant le point $(1,1)$.

Exercice 4. Soient $0 \le a < b$. Soit

$$D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, 0 < x < y < \sqrt{x^2+1} \text{ et } a < xy < b\}.$$

a) Montrer que D est un borélien.

b) À l'aide du changement de variables $u := y^2 - x^2$, $v := xy$, que l'on justifiera, calculer l'intégrale $I := \int_D (y^2 - x^2)^{xy}\, (x^2 + y^2)\, dxdy$ en fonction de a et b.

Exercice 5. Rappelons que $\int_0^\infty e^{-t^2} dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$. Soit

$$H_a(x) := \int_0^\infty e^{-(at^2 + x/t^2)}\, dt, \ \forall\, a > 0, \ \forall\, x \ge 0.$$

a) Montrer que la fonction $H_a : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ est continue.

b) Calculer $H_a(0)$.

c) Montrer que la fonction H_a est de classe C^1 sur $]0,\infty[$.

d) Calculer, pour $x > 0$, $H_a'(x)$ en fonction de $H_a(x)$. Indication : utiliser le changement de variable $t := \dfrac{\alpha}{s}$, avec α convenablement choisi.

e) En déduire que

$$H_a(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-2\sqrt{ax}},\ \forall\, a > 0,\ \forall\, x \geq 0. \tag{2}$$

Exercice 6. Pour $\alpha > 0$, soit

$$J(\alpha) := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^2} e^{-(xy^2+x/y^2)}\, x^{\alpha-1/2}\, dxdy.$$

a) En utilisant (2), montrer que $J(\alpha) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha+1}}\Gamma(\alpha)$.

b) En utilisant le changement de variables $u := xy^2$, $v := x/y^2$, que l'on justifiera, montrer que

$$J(\alpha) = \frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{2}\right).$$

c) En déduire la formule $\Gamma\left(\dfrac{\alpha}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\alpha+1}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2^{\alpha-1}}\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

Exercice 7. Pour $n \geq 1$, soit $U_n := \{x \in \mathbb{R}^n\ ;\ x_1 > 0, \ldots, x_n > 0, x_1 + \cdots + x_n < 1\}$. Soit $S_n := \lambda_n(U_n)$. Etablir une relation entre S_n et S_{n-1}. En déduire la valeur de S_n.

Exercice 8. Soit U la partie de $\mathbb{R}^3$ définie par

$$U := \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3\ ;\ u > 0, v > 0, w > 0, uv < 1, uw < 1, vw < 1\}.$$

a) Montrer que U est borélien.

b) Calculer $I := \int_U u\, v\, w\, dudvdw$. On pourra, après l'avoir justifié, utiliser le changement de variables suivant :

$$(x, y, z) = \Phi(u, v, w) := (\sqrt{vw}, \sqrt{wu}, \sqrt{uv}).$$

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+$ une fonction borélienne. Pour $a, b, c > 0$ fixés, soit

$$I_{a,b,c} := \int_{(\mathbb{R}_+^*)^3} x^{a-1}\, y^{b-1}\, z^{c-1}\, f(x+y+z)\, dxdydz.$$

a) Soit $(x, y, z) \overset{H}{\longmapsto} (u, v, w)$, où $u := x+y+z$, $v := \dfrac{x}{x+y}$ et $w := \dfrac{x+y}{x+y+z}$. Montrer que H est un C^1-difféomorphisme de $(\mathbb{R}_+^*)^3$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^3$ que l'on déterminera.

b) En utilisant H et la formule (1), en déduire que

$$I_{a,b,c} = \frac{\Gamma(a)\,\Gamma(b)\,\Gamma(c)}{\Gamma(a+b+c)} \int_0^\infty u^{a+b+c-1}\, f(u)\, du. \tag{3}$$

Exercice 10. Soit $J := \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-xy}$.

a) Montrer que $J = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$.

b) Effectuer le changement de variables $x := u - v$ et $y := u + v$ et en déduire que

$$J = \int_Q \frac{2\, dudv}{1 - u^2 + v^2},$$

où Q est un quadrilatère du plan que l'on déterminera.

c) Effectuer le changement de variable $u := \cos t$ et en déduire que $J = \pi^2/6$. Rappels : $\dfrac{1-\cos t}{\sin t} = \tan(t/2)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}\backslash\pi\,\mathbb{Z}$, et $\arctan(z) + \arctan(1/z) = \pi/2$, $\forall\, z \in \mathbb{R}$.