Fiche 3
Tribus
Fonctions mesurables

Exercice 1. Déterminer les tribus engendrées dans X par la famille $\mathscr{A}$, où :
a) $X := \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} := \{\mathbb{Z}\}$.
b) $X := \mathbb{R}$ et $\mathscr{A} := \{\{n\}\,;\, n \in \mathbb{Z}\}$.
c) $X := \mathbb{N}$ et $\mathscr{A} = \{\{0\}, \{2\}, \{4\}, \dots\}$.

Exercice 2. Soit $\mathscr{M}$ une tribu sur X et $B \in \mathscr{M}$. Montrer que la tribu trace $\mathscr{M}_B$ est égale à

$$\mathscr{M}_B = \{A\,;\, A \in \mathscr{M},\ A \subset B\}.$$

Exercice 3. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.
a) Un ouvert ou un fermé d'un espace métrique X est un borélien de X.
b) Un borélien d'un espace métrique X est un ouvert ou un fermé de X.
c) Un intervalle est dans $\mathscr{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 4. Dans cet exercice, nous considérons un espace mesurable $(X, \mathscr{M})$. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.
a) Une fonction $f : X \to \mathbb{R}$ qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs est étagée.
b) Si $f : X \to \mathbb{R}^n$ est mesurable, et si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est borélienne étagée, alors $g \circ f : X \to \mathbb{R}$ est étagée.
c) Si $f : X \to \mathbb{R}$ est telle que $f^{-1}(F) \in \mathscr{M}$ pour tout $F \subset \mathbb{R}$ fermé, alors f est mesurable.
d) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est borélienne et ne s'annule pas, alors $1/f$ est borélienne.
e) La fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \begin{cases} x+1, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases}$, est borélienne.
f) La fonction $f : X \to \mathbb{R}$ est mesurable $\iff$ $|f|$ est mesurable.

Exercice 5. Décrire les fonctions mesurables $f : X \to \mathbb{R}$ suivants.
a) X est muni de $\mathscr{M} = \{\varnothing, X\}$.
b) X est muni de $\mathscr{M} = \mathscr{P}(X)$.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique. Soient $f_n : X \to \mathbb{R}$ des fonctions boréliennes, $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\{x \in X\,;\, (f_n(x))_n \text{ converge}\}$ est un borélien de X.

Exercice 7. a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable. Montrer que f' est borélienne.
b) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer l'équivalence des propriétés suivantes :
(i) f est dérivable en x et $f'(x) = \ell$.
(ii) Nous avons la double égalité :

$$\begin{aligned} \ell &= \lim_{m\to\infty} \inf \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,;\, h \in \mathbb{Q}^*,\ |h| < \frac{1}{m} \right\} \\ &= \lim_{m\to\infty} \sup \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,;\, h \in \mathbb{Q}^*,\ |h| < \frac{1}{m} \right\}. \end{aligned}$$

c) En déduire que, si f est continue, alors la fonction $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} f'(x), & \text{si } f \text{ est dérivable en } x \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

est borélienne.

d) Vrai ou faux ? Si $g = 0$, alors f est constante.

Exercice 8. a) Montrer que si $\mathscr{A} \subset \mathscr{B}$, alors $\mathscr{M}(\mathscr{A}) \subset \mathscr{M}(\mathscr{B})$.
b) Montrer que $\mathscr{M}(\mathscr{M}(\mathscr{A})) = \mathscr{M}(\mathscr{A})$.

Exercice 9. Soit $\mathscr{A} \subset \mathscr{P}(X)$. Si $A \in \mathscr{M}(\mathscr{A})$, montrer qu'il existe une partie a. p. d. $\mathscr{B}$ de $\mathscr{A}$ telle que $A \in \mathscr{M}(\mathscr{B})$.

Indication : considérer $\mathscr{C} := \{A \in \mathscr{M}(\mathscr{A})\,;\, \exists\, \mathscr{B} \subset \mathscr{A}$ a. p. d. tel que $A \in \mathscr{M}(\mathscr{B})\}$.

Exercice 10. a) Montrer que l'union de deux tribus n'est pas nécessairement une tribu.
b) Montrer que l'union d'une suite finie et croissante de tribus est une tribu.
c) Ce dernier résultat ne passe pas à une union infinie. En effet, pour $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathscr{M}_n$ la tribu sur $\mathbb{N}$ engendrée par $\mathscr{P}(\{0, \ldots, n\})$. Montrer que $(\mathscr{M}_n)_{n\geq 0}$ est une suite croissante de tribus sur $\mathbb{N}$, mais que $\bigcup\limits_{n\geq 0} \mathscr{M}_n$ n'est pas une tribu.

Exercice 11. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.
a) L'ensemble $[2, 3[\bigcap \mathbb{Q}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.
b) L'ensemble $A := \{x \in \mathbb{R}\,;\, \cos x = \sin(\sin x)\}$ est un borélien de $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $Y \subset X$, muni de la métrique induite par X. Montrer que $\mathscr{B}(Y) = \{B \cap Y\,;\, B \in \mathscr{B}(X)\}$.
De manière équivalente, $\mathscr{B}(Y)$ coïncide avec la tribu trace de $\mathscr{B}(X)$ sur Y.

Exercice 13. Soit $\Phi : X \to Y$ un homéomorphisme entre espaces métriques et soit $A \subset X$. Montrer que $A \in \mathscr{B}(X)$ si et seulement si $\Phi(A) \in \mathscr{B}(Y)$.

Exercice 14. Soient (X, d) et (Y, δ) deux espaces métriques. Montrer que si nous munissons $X \times Y$ d'une métrique produit, alors $\mathscr{B}(X) \times \mathscr{B}(Y) \subset \mathscr{B}(X \times Y)$.
En particulier, on a $\mathscr{B}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{B}(\mathbb{R}^m) \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}^{n+m})$.

Exercice 15. Soient $f : X \to \mathbb{R}$ mesurable et $g : X \to \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x) := \begin{cases} 1, & \text{si } f(x) \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}.$$

Montrer que g est mesurable.

Exercice 16. Soit (X, d) un espace métrique. Soit $f : X \to \mathbb{R}$.
a) Montrer que f est continue en $x \in X \iff \forall\, \varepsilon > 0$, il existe un voisinage V de x tel que

$$[y, z \in V] \implies |f(y) - f(z)| < \varepsilon.$$

b) En déduire que l'ensemble $\{x \in X\,;\, f$ continue en $x\}$ est un borélien.