
Fiche 4
FONCTIONS MESURABLES
MESURES

Exercice 1. Soit $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$. On définit, pour tout $0 < M < \infty$, la fonction f_M par

$$f_M(x) := \begin{cases} f(x), & \text{si } |f(x)| < M \\ M, & \text{si } f(x) \geq M \\ -M, & \text{si } f(x) \leq -M \end{cases}.$$

Montrer que f est mesurable si et seulement si f_M est mesurable pour tout $M > 0$.

Exercice 2. Soit (X, d) un espace métrique.

a) Soient $A \in \mathscr{B}(X)$ et $f : A \to \mathbb{R}$ continue. Montrer que f est borélienne. Ici, et dans les questions suivantes, A est muni de la tribu trace sur A.

   En particulier, toute fonction continue $f : X \to \mathbb{R}$ est borélienne.

b) Plus généralement, montrer que si f est continue en dehors d'une partie a. p. d. de X, alors f est borélienne.

c) Encore plus généralement. Soient $A_1, A_2, \ldots,$ boréliens deux à deux disjoints d'union X. Pour chaque A_k, soit $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Montrer que f est borélienne.

d) Montrer le même résultat que dans c) si on remplace « f_k continue » par « f_k borélienne » (voir aussi le point f)).

e) Montrer le même résultat que dans d) pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

f) Soit $(X, \mathscr{M})$ un espace mesurable. Soient $A_1, A_2, \ldots,$ mesurables deux à deux disjoints et d'union X. Pour chaque A_k, soit $f_k : A_k \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := f_k(x)$ si $x \in A_k$. Montrer que f est mesurable.

g) Montrer que les items a)–e) sont des cas particuliers de l'item f).

Exercice 3. Soit $(X, \mathscr{M}, \mu)$ un espace mesuré. Prouver ou réfuter les assertions suivantes.

a) Si $A \in \mathscr{M}$, alors $\mu(X) = \mu(A) + \mu(A^c)$.

b) Si $(A_n)_{n\geq 0}$ est une suite décroissante d'éléments de $\mathscr{M}$ et $\mu(A_2) < \infty$, alors

$$\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right) = \lim_n \mu(A_n).$$

c) Si $A, B \in \mathscr{M}$ et $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, alors A et B sont disjoints.

d) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) \,;\, A \in \mathscr{M}\} = \{0, 1, 2\}$.

e) Il existe un espace mesuré $(X, \mathscr{M}, \mu)$ tel que $\{\mu(A) \,;\, A \in \mathscr{M}\} = \{0, 1, 3\}$.

f) La mesure de comptage sur $\mathbb{N}$ est finie, respectivement σ-finie.

g) Soient $\mathscr{A}$ une famille qui engendre $\mathscr{M}$ et μ_1, μ_2 deux mesures sur $\mathscr{M}$. On suppose que pour tout A dans $\mathscr{A}$ on a $\mu_1(A) = \mu_2(A)$. Alors pour tout T dans $\mathscr{M}$ on a $\mu_1(T) = \mu_2(T)$.

Exercice 4. (Mesures discrètes) Soit $\mathscr{M}$ une tribu contenant les singletons. La mesure μ sur $(X, \mathscr{M})$ est *continue* si, pour tout $x \in X$, $\mu(\{x\}) = 0$. μ est *discrète* s'il existe un ensemble D a. p. d. tel que $\mu(D^c) = 0$.

a) Montrer que μ est continue si et seulement si toute partie a. p. d. A de X est $\mu-$négligeable.

b) Montrer que μ est discrète si et seulement si il existe une suite $(a_n)_{n\geq 1}$ de points de X et une suite $(c_n)_{n\geq 1} \subset [0,\infty]$ telles que $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \delta_{a_n}$.

c) Supposons maintenant μ σ-finie. Montrer que μ s'écrit de façon unique $\mu = \mu_c + \mu_d$, où μ_c est une mesure continue et μ_d est une mesure discrète.

Exercice 5. Soit $f : X \to \mathbb{R}$ une fonction étagée. Montrer que $f^{-1}(B) \in \mathscr{M}$, $\forall\, B \subset \mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit μ la mesure de comptage sur $(\mathbb{N}, \mathscr{P}(\mathbb{N}))$. Trouver une suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n\geq 0}$ telle que $\mu(A_n)$ ne tend pas vers $\mu\left(\bigcap_{n\geq 0} A_n\right)$.

Exercice 7. Soit μ une mesure *finie* sur $(X, \mathscr{M})$. Soit $\mathscr{S} \subset \mathscr{M}$ l'ensemble défini par

$$\mathscr{S} := \{A \in \mathscr{M}\ ;\ \mu(A) = 0 \text{ ou } \mu(A) = \mu(X)\}.$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est une tribu sur X.

Exercice 8. Soit μ une mesure σ-finie sur $(X, \mathscr{M})$. Montrer qu'il existe une suite d'ensembles deux à deux disjoints, de mesure finie et d'union X.

Exercice 9. (Formule de Poincaré)

a) Montrer que si $\mu\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n\right) < \infty$ alors

$$\mu\left(A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_n\right) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1\leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq n} \mu\left(A_{i_1} \bigcap \ldots \bigcap A_{i_j}\right).$$

b) Que devient cette formule dans le cas particulier de la mesure de comptage ?

Exercice 10. Soit $\mathscr{M}$ une tribu contenant les singletons. Soit μ une mesure sur $(X, \mathscr{M})$. Soit $D := \{x \in X\ ;\ \mu(\{x\}) > 0\}$. Est-il vrai que D est a. p. d.

a) Si μ est finie ?
b) Si μ est σ-finie ?
c) Si μ est quelconque ?